Tanárverseny feladatainak megoldása

Erdős Gábor, Nagykanizsa

erdosgaborkanizsa@gmail.com

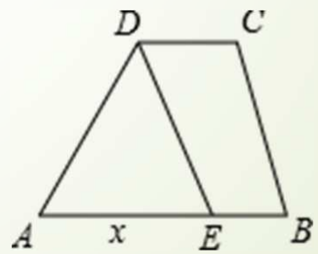
www.microprof.hu – internetes tesztverseny

1-5. feladat

- **1**. $2019 : 3 = 673$ oldallap, 2 alaplap, összesen 675 lap. **B**
- **2**. 65 fej, 176 láb, különbség 111. **C**
- **3**. $2^{xy} = 15^{y} = 32$, vagyis $xy = 5$. **A**
- **4**. Lehet egyenlettel. Tesztes ötlet: 2 próba elég.
  Vagy: mérleg. Apa 20 év pluszban van, a többiek átlag 4 év mínuszban.
  Mivel $20 = 5 \cdot 4$, így a többiek 5-en vannak, ebből 4 gyerek. **D**
- **5**. A belső +7 nem fontos. Grafikusan. 7 megoldás. **D**

6-10. feladat

- **6**. 2019 → 2013, 848 → 867, $2016 + 867 = 2880 \rightarrow 3012$. **A**
- **7**. Zérushelyek 2 és 5, alapja 3. Az *y* tengelyt 10-nél, magassága 10. Terület 15.
  (hasonló középszintű érettségi feladat volt idén) **E**
- **8**. 60% csokira, 40% marad. Ennek 35%-a könyv, 65%-a 221.
  Ez eredeti zsebpénzének 26%-a, étcsokira meg a 36% ment el.
  BECSLÉS! Kb. a másfélszerese, ennek csak a 306 felel meg. **B**
- **9**. 37 fej → min. 74 láb. Maradt 38 láb, vagyis 19 póni, 18 gyerek. (próba is jó) **B**
- **10**. $\frac{x \cdot m}{2} = 35m$, ahonnan $x = 35$. **C**



11-15. feladat

- **11**. Számolgatás törtekkel: közönség 1/4 része külföldi nő, ez a női nézők 5/11 része, így a nők a közönség 11/20 része, a férfiak a 9/20 része, 45%-a. **C**
- **12**. Lényegi ötlet: k(A)+k(B)=k. Az A oldalainak összege 14, szorzata 48, így oldalai 6 és 8. A kisebb nem jelölt téglalap oldalai 6 és 12, területre 72. **D**
- **13**. $q=\frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}=7^{-\frac{1}{6}}$ ezért a negyedik tag 1. **E**
- **14**. Prímfelbontásban 2 db 7-es → van 7 és 14 éves, a többi csak 1 és 9 lehet. Zsófi a 7 éves, többiek életkorának összege 1+9+14=24. **D**
- **15**. A hónapok kezdőnapjai rendre: p, h, k, p, v, sze, p, h, cs, szo, k, cs. 5 vasárnap van: január, május, július, október. Ebből július szerepelt válaszként. **D**

16-20. feladat

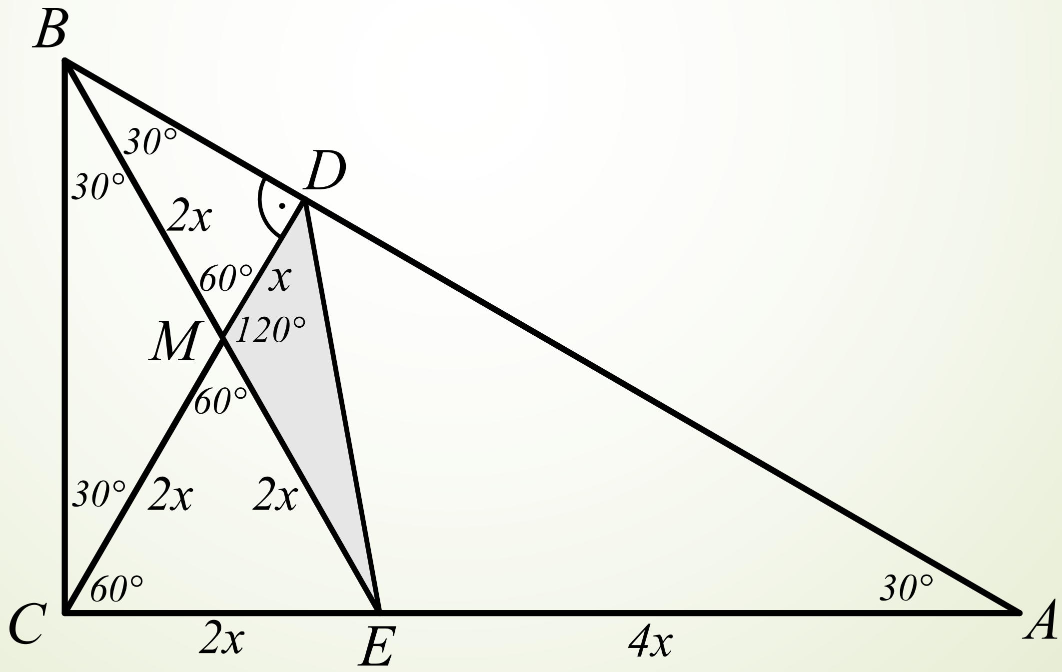
- **16**. Átfogó 26, területképletből $r = 4$. $BE = 10 - 4 = 6$.
$AF = s - b = 30 - 24 = 6$. $EF = 26 - 2 \cdot 6 = 14$. **E**
- **17**. Amin nincs piros lap, az $3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$, $3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$, $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ lehet.
Maximum $5 \cdot 6 \cdot 7 - 72 = 138$ olyan lesz, amin van piros. **D**
- **18**. $3 - 2 = 1$-gyel beszorozva, azonosságokkal teleszkópos szorzat,
a számláló 3^{256}, így az osztás után az eredmény 3^{256}. (a C bold maradt…) **C**
- **19**. Ha 3. és 6. állítás hamis, akkor 2. és 4. igaz lenne, de ez lehetetlen.
Tehát 3. és 6. igaz, $7b$ alakú a szám. De így 2. igaz, ezért 5. is.
Tehát 1. és 4. hamis. $7b$ osztható 6-tal és nincs bent 2-es. A szám a 78. **D**
- **20**. Legyen a középső négyszög területe x, a felső háromszögé y.
A négyzet területének a fele $x + y + 5 = 7 + 5 + 12 + 8 + y$.
Innen $x = 7 + 12 + 8 = 27$. **E**

21-23. feladat

- **21**. Az 1. síknegyedben $|x| = x$ és $|y| = y$, nincs pont. (B, C válasz nem lehet.)
  A 2. síknegyedben $|x| = -x$ és $|y| = y$, innen $x = -1$. (D válasz sem lehet.)
  Hasonlóan a 4. síknegyedben y$= -1$. (Továbbra is A és E közül kell választani.)
  A 3. síknegyedben $|x| = -x$ és $|y| = -y$, innen $x^2 + y^2 = 1$ körív egyenlete. **A**
- **22**. Mivel $2019 = 3 \cdot 673$, ha ezzel osztható, akkor ez a két prím szerepel benne.
  Az osztók száma függvény miatt ($n = 3^2 \cdot 673^{672}$ vagy) $n = 3^{672} \cdot 673^2$.
  Utóbbi osztói közül ötödik hatványok: 1, 3^5, 3^{10}, …, 3^{670}, ez $\frac{670}{5} + 1 = 135$ szám. **A**
- **23**. Feketékre $4! = 24$ lehetőség. Fehérre az első sorban 3 lehetőség. Nézzük most azt a sort, amelyikben ugyanott van a fekete, mint az első sorban a fehér.
  Itt szintén 3 lehetőség. A maradék két sorban minden esetben egyértelmű.
  Fehérekre $3 \cdot 3 = 9$ lehetőség, összesen $24 \cdot 9 = 216$. **C**

24. feladat

- **24**. Ha $t(DME) = t$, akkor $t(BMD) = t$, így $t(BCM) = t(CEM) = 2t$, ezért $t(BCE) = 4t$, $t(BEA) = 8t$, vagyis $t(ABC) = 12t = 12 \cdot 71 = 852$. **C**

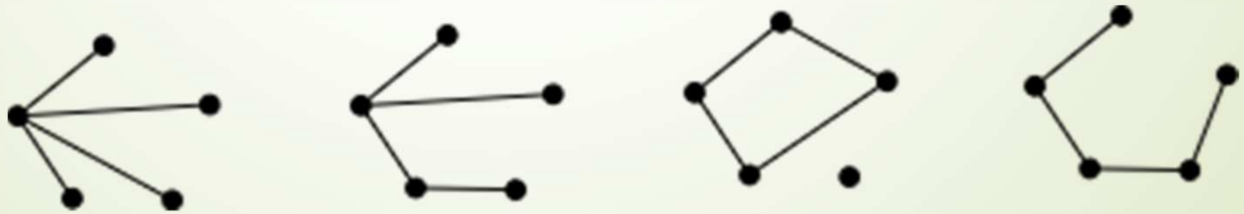


25-26. feladat

- **25.** A feltételt felírva, 100-zal szorozva $47b < 100f < 50b$. Nézzünk két esetet.
  Ha b páros: $100f$ és $50b$ is két nullára végződik, különbségük minimum 100, vagyis $3b > 100$, így $b \geq 34$.
  Ha b páratlan: $100f$ két nullára, $50b$ pedig 50-re végződik, különbségük minimum 50, vagyis $3b > 50$, így $b \geq 17$. Ha $b = 17$, akkor $f = 8$ esetén teljesül a feltétel.
  Gyakori trükk a *más érték* helye válaszként: ne zárja ki, legyen magabiztos a tudás. **E**
- **26**. $\binom{2019}{2} \cdot 2 - \frac{2019}{3} \cdot 2 = 2019 \cdot 2018 - 673 \cdot 2 =?$ Spóroljunk a teszten időt!
  Innen ki is lehet számolni, de elég: utolsó számjegyeket nézni, az 6 lesz!
  (Írhattam volna jobb válaszokat: az eredmény kb. 4 millió, a 2 milliósok kizárhatók.) **B**

27. feladat

- **27**. Direkt módszer: esetekre bontás csúcsok fokszáma szerint
  4, 1, 1, 1, 1 → 5 eset (melyik 4)
  3, 2, 1, 1, 1 → $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eset (melyik 3, melyik 2, a 2-től hova)
  2, 2, 2, 2, 0 → $5 \cdot 3 = 15$ eset (melyik 0, egy kiszemelt melyikkel nincs összekötve)
  tipikus hiba: $5 \cdot 3! = 30$ eset, ciklikus permutáció miatt – irány miatt kell a /2
  2, 2, 2, 1, 1 → $\frac{(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)}{2} = 60$ eset (valahonnan elkezdem, irány miatt kétszer számoltam
  összesen: $5 + 60 + 15 + 60 = 140$ eset
  komplementer módszer: összesen $\binom{10}{4} = 210$ gráf, ebből rossz: háromszöget tartalmazó,
  ilyen van $\binom{5}{3} \cdot 7 = 70$ (vége: negyedik él a maradék 7-ből), jó eset $210 - 70 = 140$ **E**



28. feladat

- **28**. Vizsgáljuk az oszlopösszeg változását balról jobbra haladva.
  1→2: csökkenés 1, növekedés 62, változás $62 - 1 = +61$
  2→3: csökkenés 3, növekedés 61, változás $61 - 3 = +58$
  általánosan:
  $n \to n + 1$: csökkenés $\binom{n+1}{2}$, növekedés $63 - n$, változás $63 - n - \binom{n+1}{2}$.
  Az a kérdés, ez mikor lesz negatív. Átalakítás után: akkor, ha $n \cdot (n + 3) < 126$.
  Ez 9-re még nem teljesül, de 10-re már igen. A 10. oszlopig nő, onnan csökken.
  Versenyen egyenlőtlenség helyett végig is írható a változások sora:
  +61, +58, +54, +49, +43, +36, +28, +19, +9, −2, …
  A változás mindig 1-gyel többel csökken.

29-30. feladat

- **29**. Erről később részletesebben (ötletadó feladat) 75° **E**
- **30**. Számoljuk a rosszakat és a jókat is, kezdjük kicsivel (rekurzív módszer).
  1 betűs szavak: rossz *k*, *c*, *s* jó *e*, azaz $r(1) = 3$ és $j(1) = 1$.
  Több betűs szavak: rossz, ha csak msh vagy egy eggyel rövidebb végére bármi,
  azaz $r(n) = 3^n + 4 \cdot j(n-1)$. Jó komplementer módszerrel $\mathrm{j}(n) = 4^n - r(n)$.
  Rekurzív definíció adott, számoljunk.

$r(2) = 9 + 4 \cdot 1 = 13$	$j(2) = 16 - 13 = 3.$
$r(3) = 27 + 4 \cdot 3 = 39$	$j(3) = 64 - 39 = 25.$
$r(4) = 81 + 4 \cdot 25 = 181$	$j(4) = 256 - 181 = 75.$
$r(5) = 243 + 4 \cdot 75 = 543$	$j(5) = 1024 - 543 = 481.$

D

NMMV 9. osztály 3. feladat (29. nyomán)

- Az *ABC* szabályos háromszög *AB* oldalának felezőpontja *F*. A *CF* szakasz azon belső pontja a *D* pont, amelyre az *ADB* szög 90 fokos. A *CF* szakasz azon belső pontja az *E* pont, amelyre a *CD* és a *DE* szakaszok hossza egyenlő.
  Hány fokos az *AEB* szög?
- Furcsa tapasztalat: 13 megoldóból többség trigonometriával. (addíciós tétel, sinustétel,…)
  Feltételezés: erdélyiek? Nem! 8 magyarországi, 2 vajdasági, 3 erdélyi.
  Nincs szép elemi megoldás? Erdős-iskolás csapatmunka, született 20 darab!
  Olvasható: matek.fazekas.hu portálon, Oktatási anyagok/Cikkek, tanulmányok
- Induló ötletek (internetes kereső modell):
  D felezőpont kulcsszóra: Thalesz-tétel megfordítás, középpontos tükrözés, középvonal,…
  Szögek alapján: keressünk szabályos, félszabályos, egyenlő szárú háromszögeket
  Derékszögek kapcsán: kiszámolható távolságok Pitagorasz-tétellel

Több megoldásnál használt távolságadatok

$CF = 2x + y = \sqrt{3}$ $\quad$ $DF = x + y = 1$

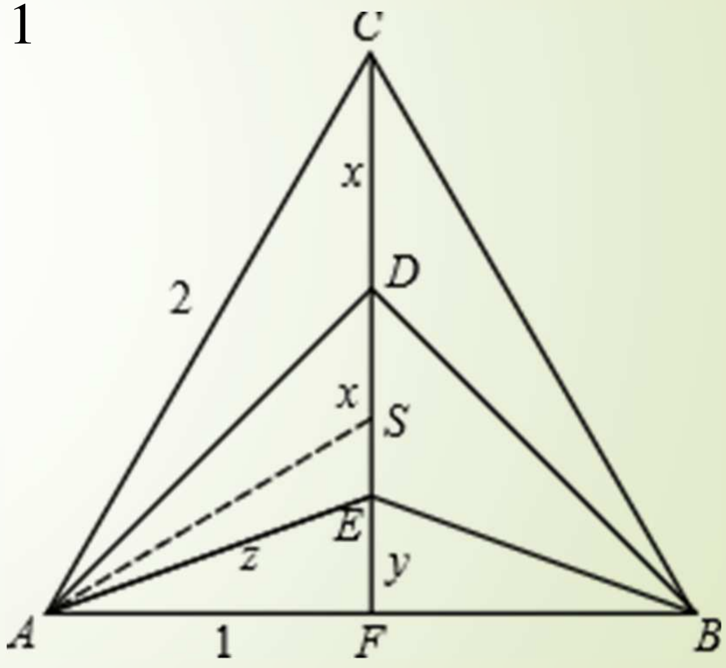
$CD = DE = x = \sqrt{3} - 1$ $\quad$ $AD = \sqrt{2}$

$$EF = y = \sqrt{3} - 2\left(\sqrt{3} - 1\right) = 2 - \sqrt{3}$$

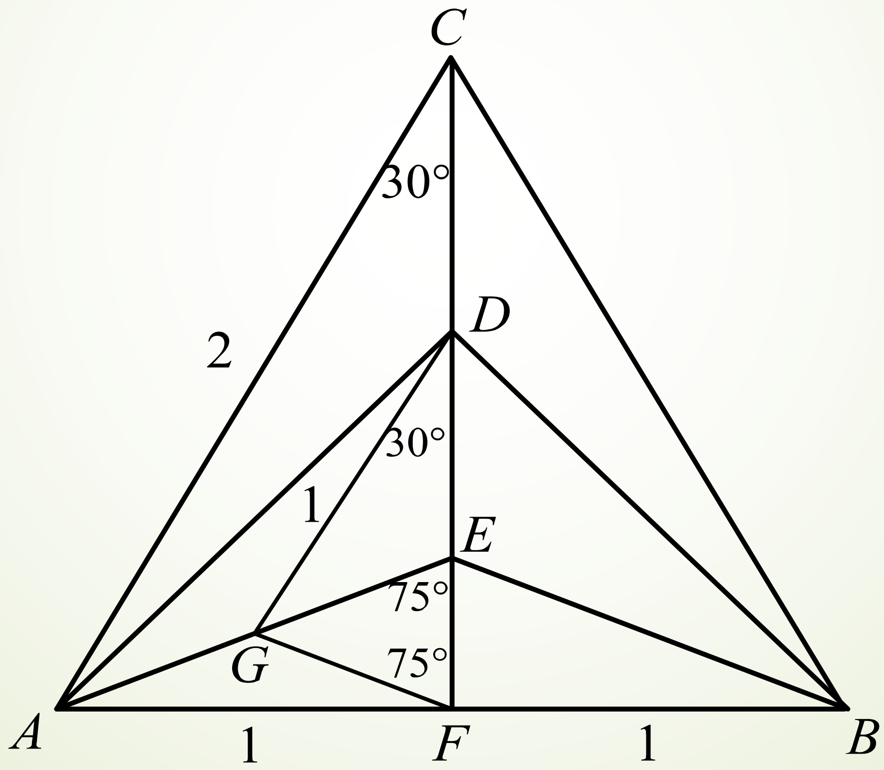
$$AE = z = \sqrt{1 + \left(2 - \sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$SF = \dfrac{CF}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $AS = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$$SE = \frac{\sqrt{3}}{3} - \left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$$

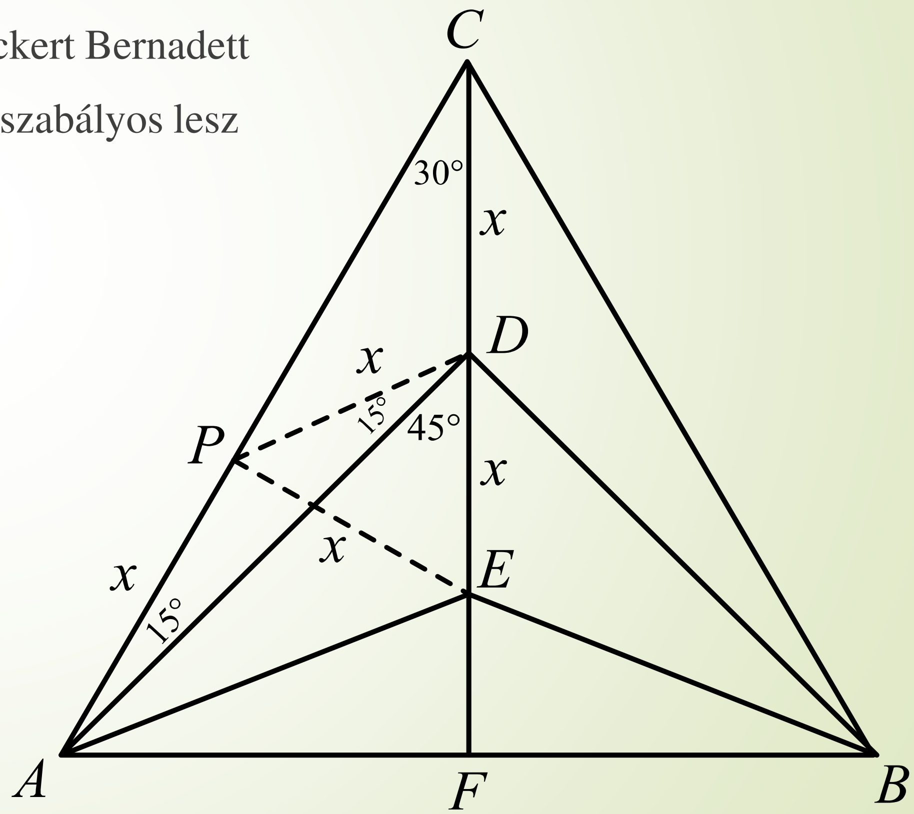


Eredeti megoldás



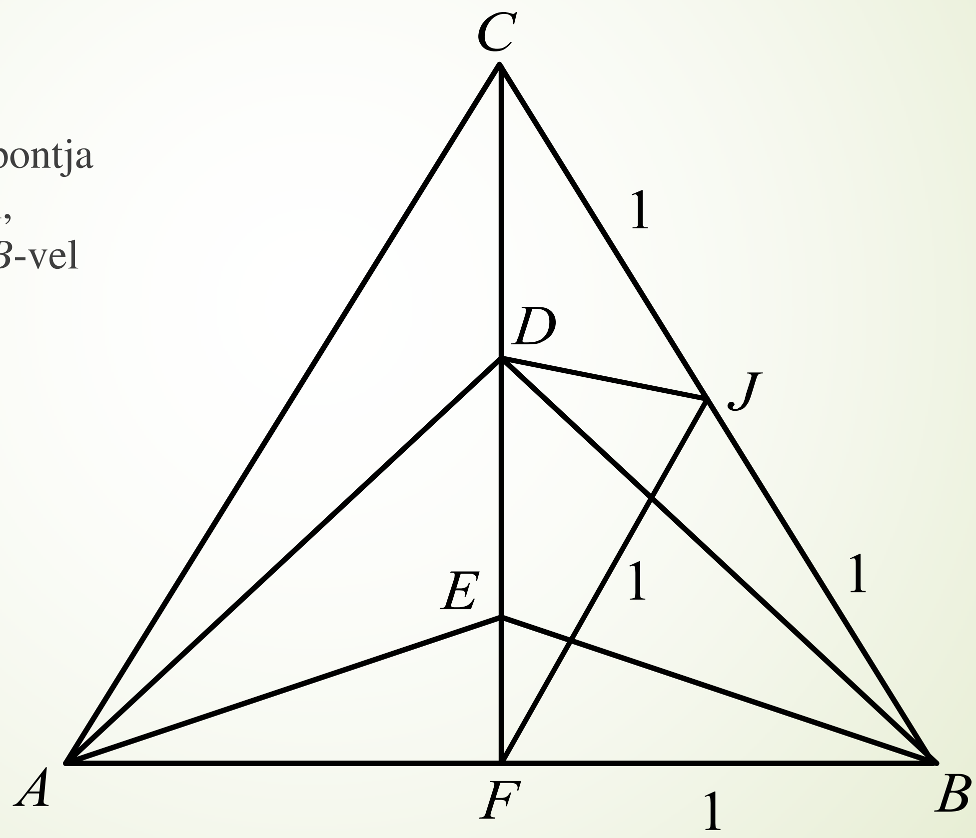
2. megoldás

- Dr. Katz Sándor, Szaszkó-Bogárné Eckert Bernadett
- Ötlet: merőleges E-ből a szárra → félszabályos lesz



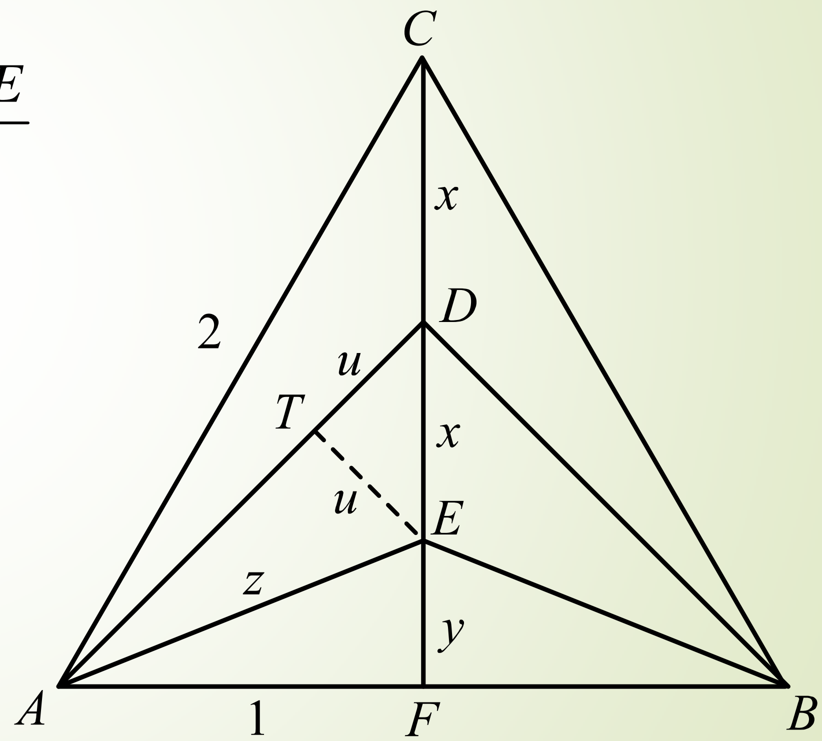
3. megoldás

- Bíró Bálint
  J a szár felezőpontja
  DJ középvonal,
  párhuzamos *EB*-vel



4. megoldás

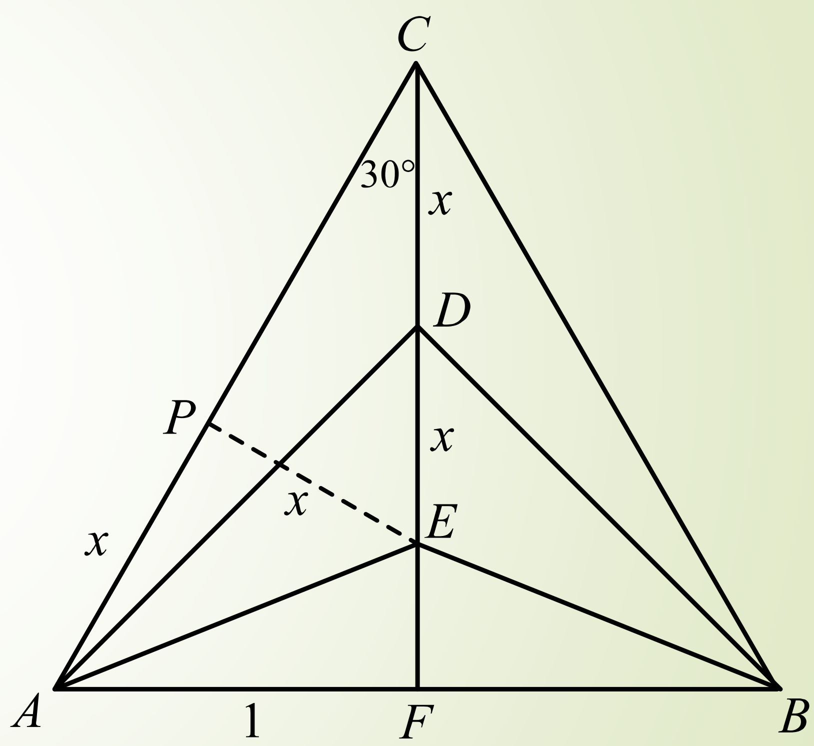
$$ET = TD = u = \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{z}{2} = \frac{AE}{2}$$



5. megoldás

$$CP=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)=3-\sqrt{3},$$

$$AP=2-\left(3-\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-1=x.$$

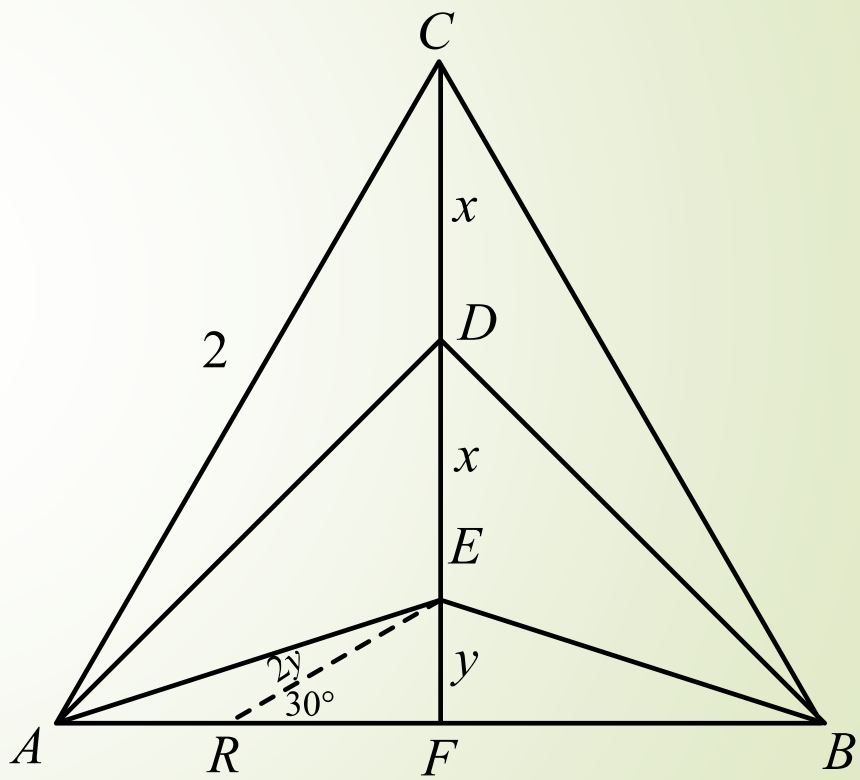


6. megoldás

- Dr. Katz Sándor, Dr. Tuza Zsolt

$$RF = y \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$$

$$AR = 1 - \left(2\sqrt{3} - 3\right) = 4 - 2\sqrt{3} = RE$$

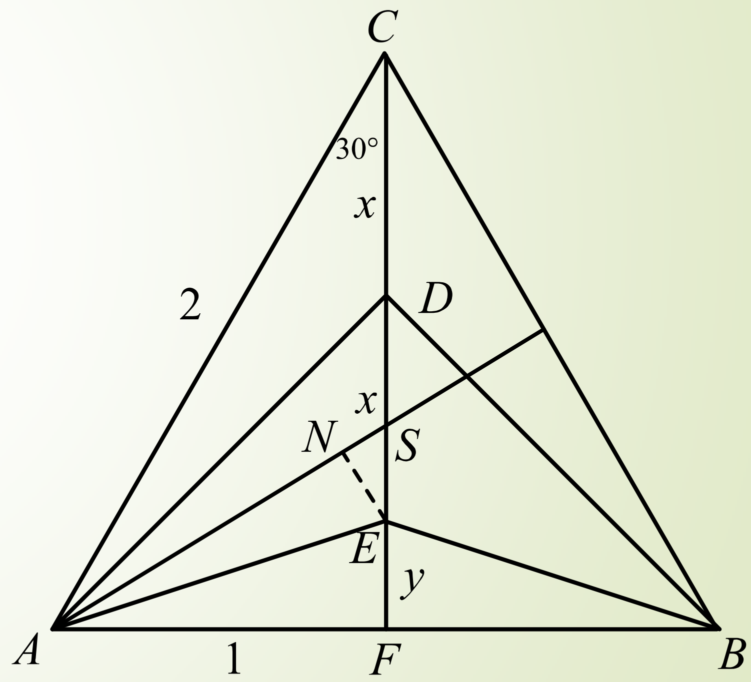


7. megoldás

- Bíró Bálint
  ESN félszabályos

$$SN = \frac{SE}{2} = \frac{4\sqrt{3}-6}{6}$$

$$AN = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{4\sqrt{3}-6}{6} = 1$$



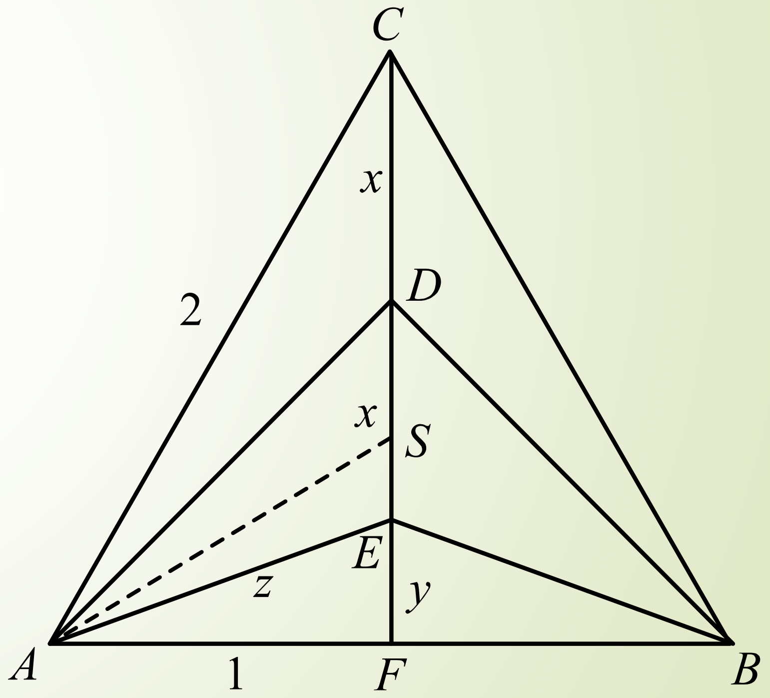
8. megoldás

- Szögfelező-tétel megfordításával

$$\frac{SE}{EF}=\frac{4\sqrt{3}-6}{3}:\left(2-\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}{3\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}:1=\frac{AS}{AF}.$$



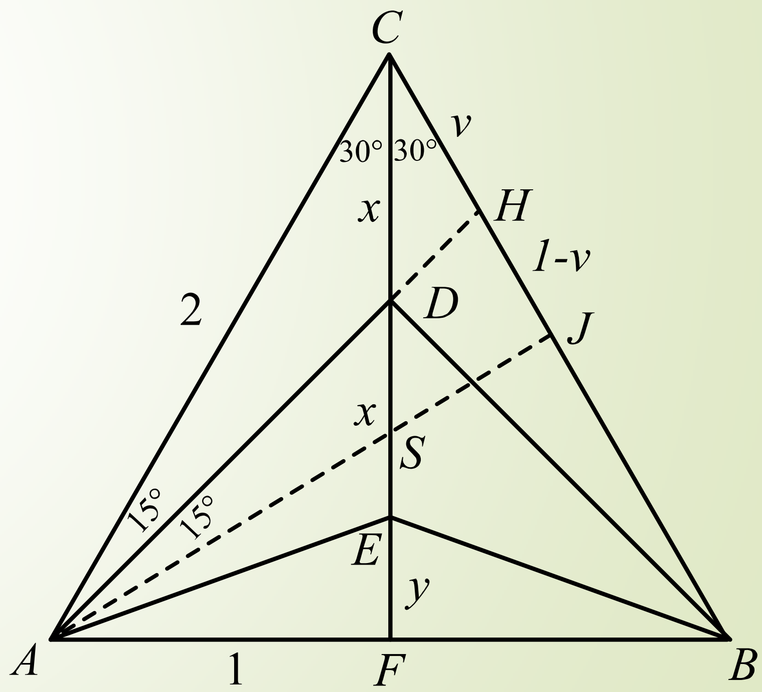
9-10. megoldás

- Bekőné Wekszli Mária
  hasonlósággal (*ADE* és *DHC*) és szögfelező-tétellel
- Dr. Tuza Zsolt hasonlóan (*AEC* és *DHC*)

$$v = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\frac{AE}{AD} = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}},$$

$$\frac{CH}{CD} = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$

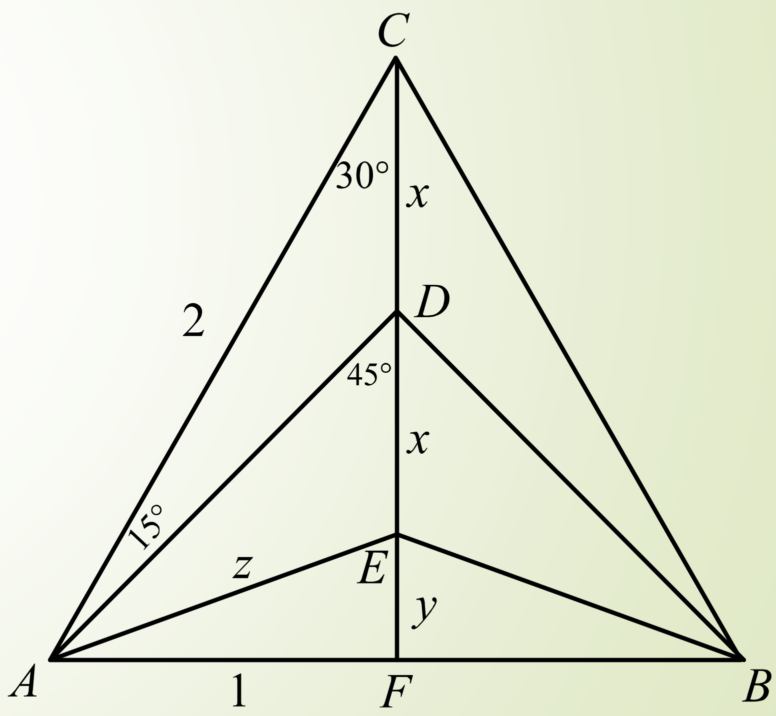


11. megoldás

- Jánosik Máté (első díjas versenyző)
  AEC és *DEA* háromszögek hasonlóak

$$\frac{CE}{AE}=\frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\sqrt{2}$$

$$\frac{AE}{DE}=\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}$$



12. megoldás

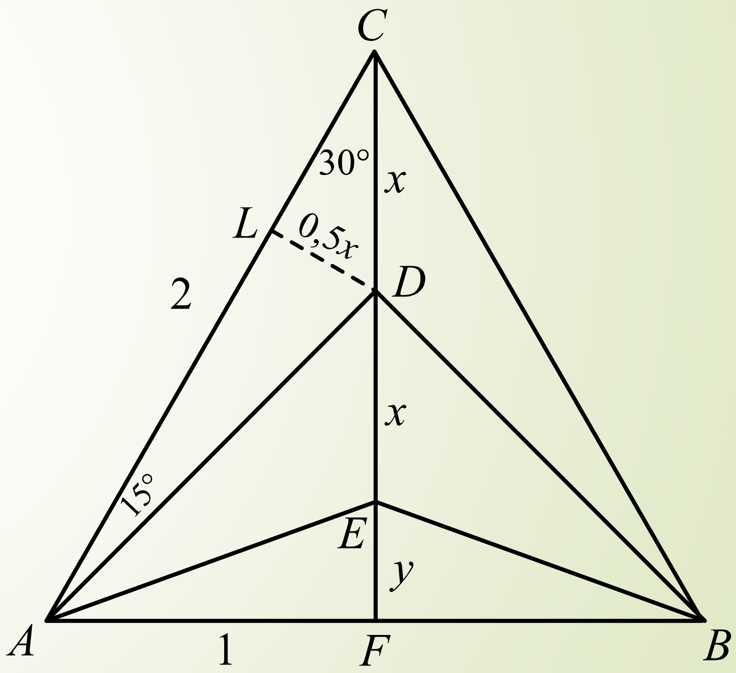
- Dr. Tuza Zsolt
  ADL és *AEF* hasonlók

$$DL = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \qquad CL = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

$$AL = 2 - \frac{3-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\frac{DL}{AL} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = \frac{EF}{AF}.$$

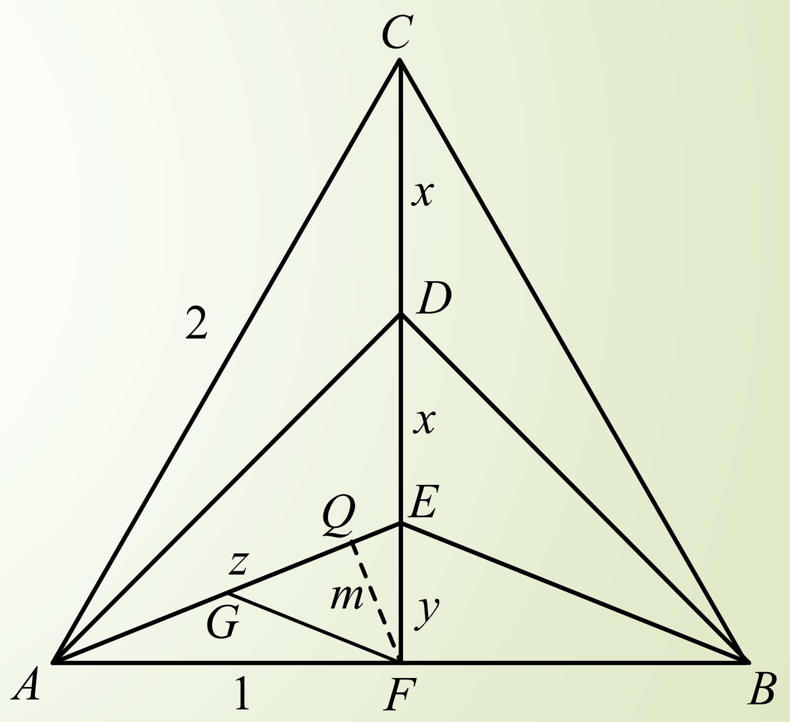


13. megoldás

- Erdős, Katz, Szoldatics
  ismert feladatra visszavezetés:
  15, 75, 90 fokos háromszög tulajdonsága

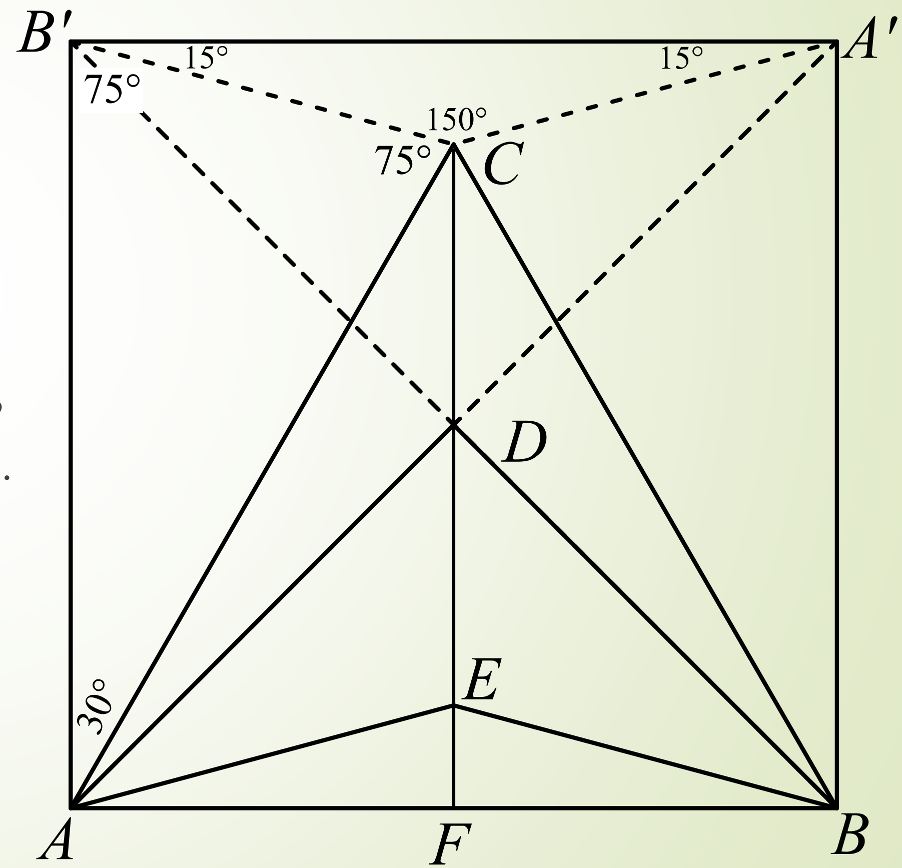
$$FQ = m = \frac{AF \cdot FE}{AE} = \frac{1 \cdot \left(2-\sqrt{3}\right)}{2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}} ==$$

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{4} = \frac{z}{4}.$$



14. megoldás – nálam ez a nyertes

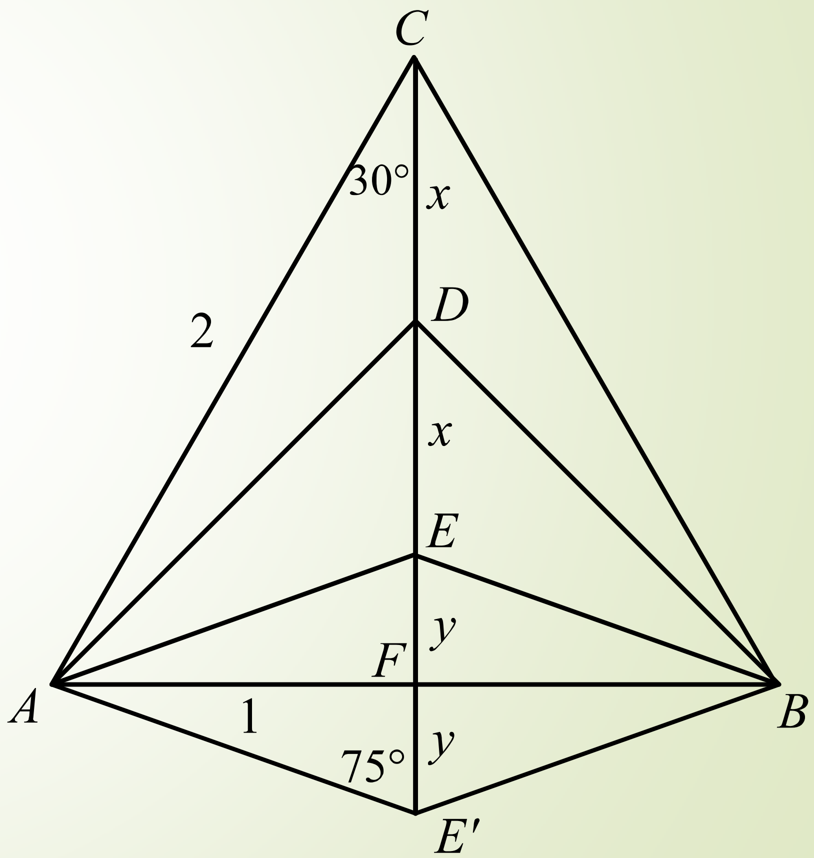
- Szoldatics József
  ismert feladatra visszavezetés
  alkalmazzunk transzformációkat
- Talán körbeértünk?
  Hogyan születnek az „új” feladatok?
  Engem a 29. feladat ihletett.
  És azt, aki anno javasolta a Kengurura?
  Szerintem őt meg ez az ismert feladat…



15. megoldás

- Ábrahám Gábor, Róka Sándor

  Ötletadó: $DF = x + y = 1$
  Ekkor $CE' = 2x + 2y = 2 = AC$
  Transzformáció: *E* pontot tükrözzük *AB*-re.



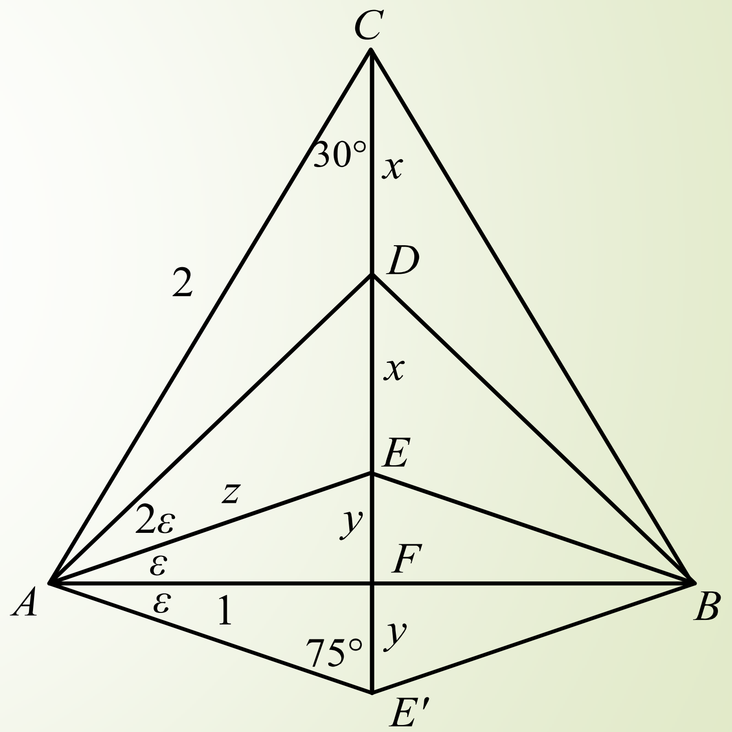
16. megoldás

- Bekőné Wekszli Mária
  Ugyanaz az ábra, mint előbb,
  szögfelezőtétel megfordítása

$$\frac{AE'}{AD}=\frac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

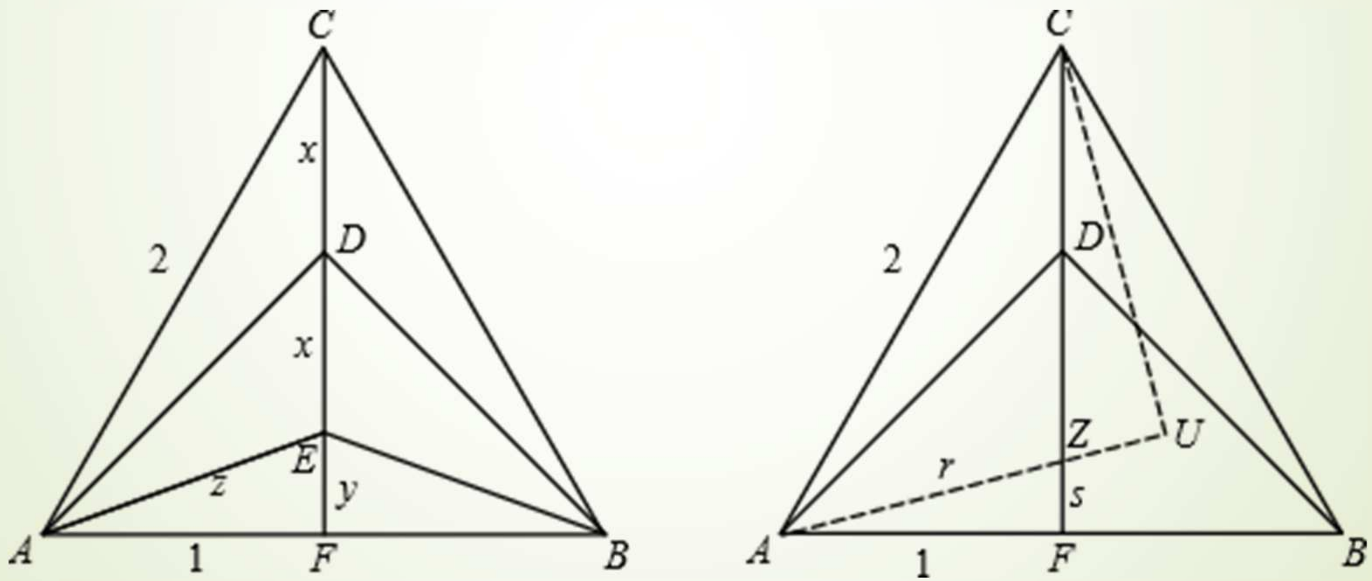
$$\frac{EE'}{ED}=\frac{2y}{x}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}-1}=\frac{2\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}=$$

$$=\sqrt{3}-1=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$$



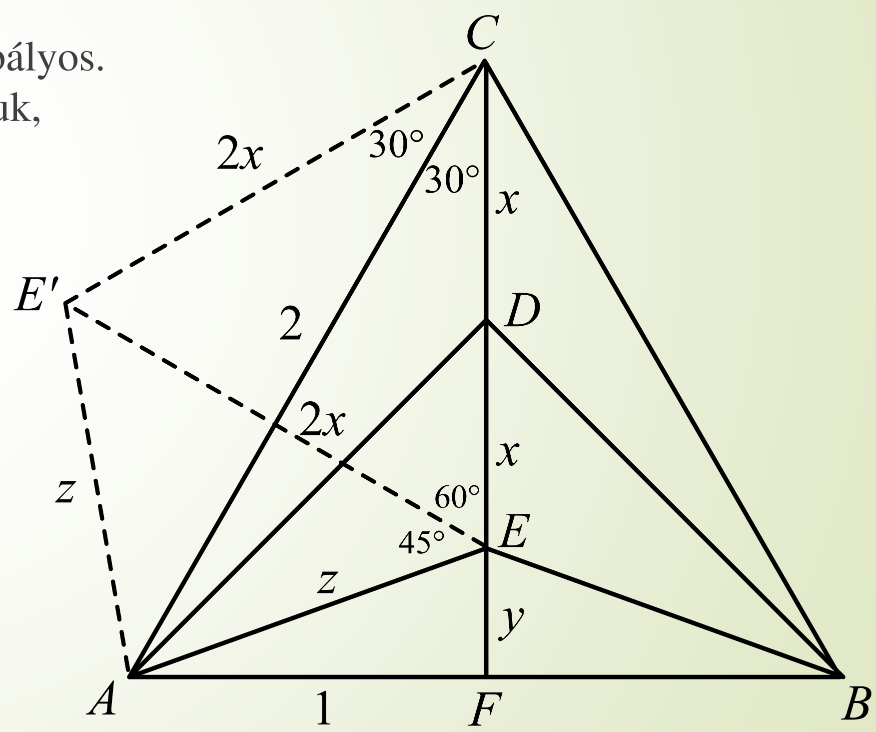
17. megoldás

- Ábrahám Gábor - elforgatással
  AFZ és a CUZ háromszögek hasonlók, arány $\sqrt{2}$. Z pont nem más, mint E.



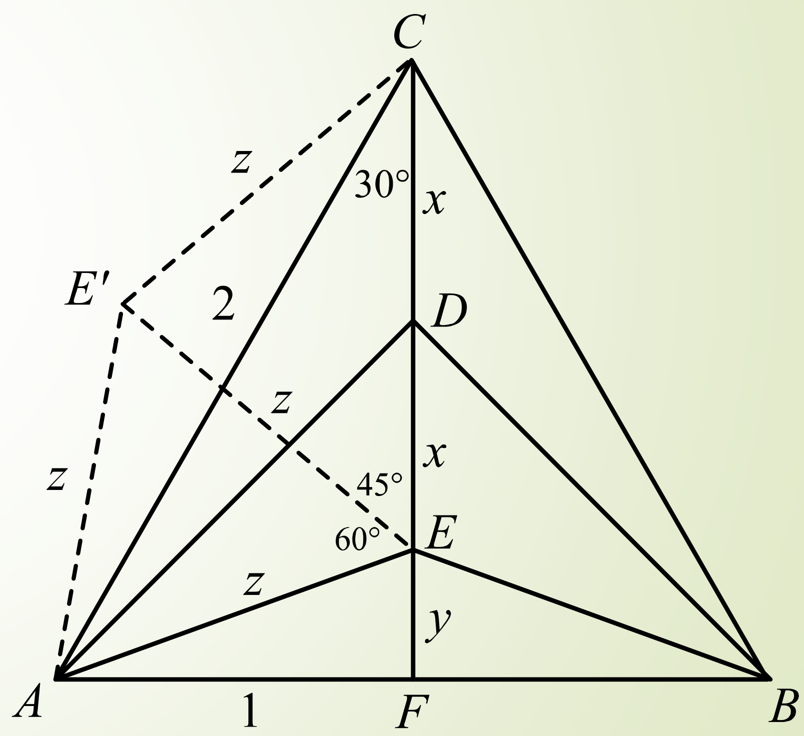
18. megoldás

- Szoldatics József
  E pont tükrözésével *CEE*' háromszög szabályos. Pitagorasz-tétel megfordításával megkapjuk, hogy *AEE*' derékszögű.



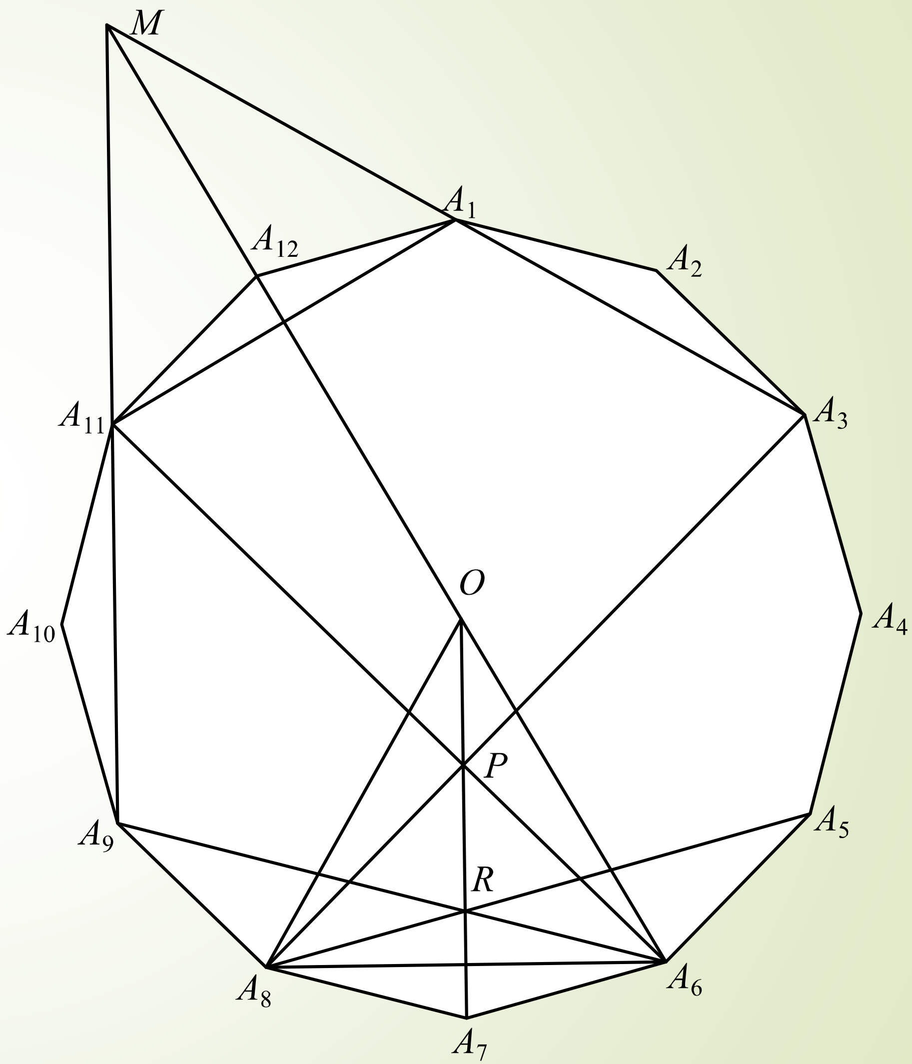
19. megoldás

- Szoldatics József
  A pont körül 60 fokos elforgatás,
  ezért *AEE'* háromszög szabályos.
  (*EB* elforgatottja *E'C*.)
  Pitagorasz-tétel megfordításával
  megkapjuk, hogy *CEE*' derékszögű.



20. megoldás

- Szoldatics József 12-szöggel A_6 középpontú, megfelelő arányú kicsinyítéssel $A_{11}A_9$ képe PR, MA_{11} képe OP, azaz $OP = PR$. $A_{11}A_9$ 90 fokos elforgatottja A_8A_3 . Innen beazonosíthatók a pontok. A_9A_6 30 fokos elforgatottja A_8A_5 .



- Köszönöm a figyelmet!
- erdosgaborkanizsa@gmail.com
- www.microprof.hu – online tesztverseny, felkészülési lehetőség tesztversenyekre