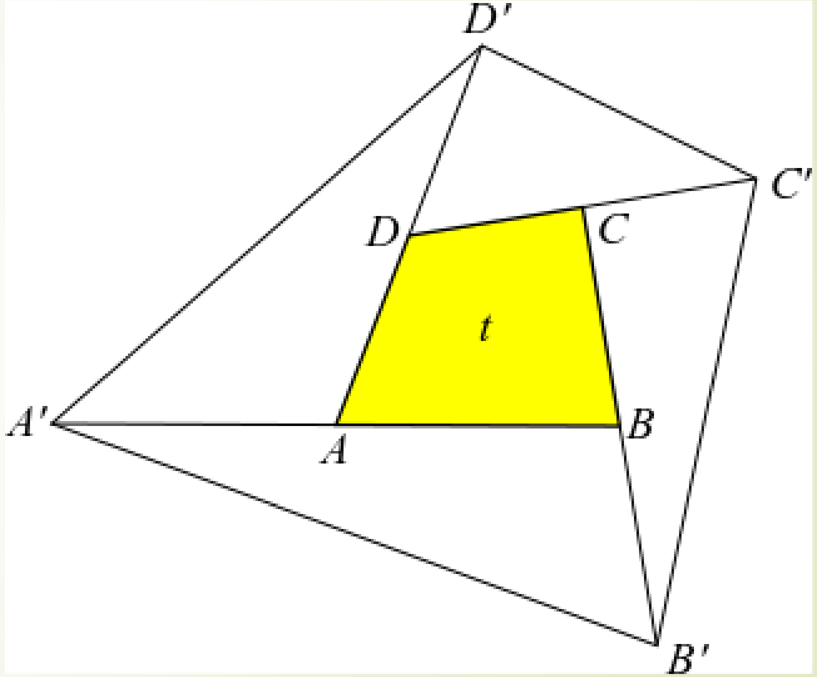
Területfelezés

Erdős Gábor, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

RLV 2024, Budapest

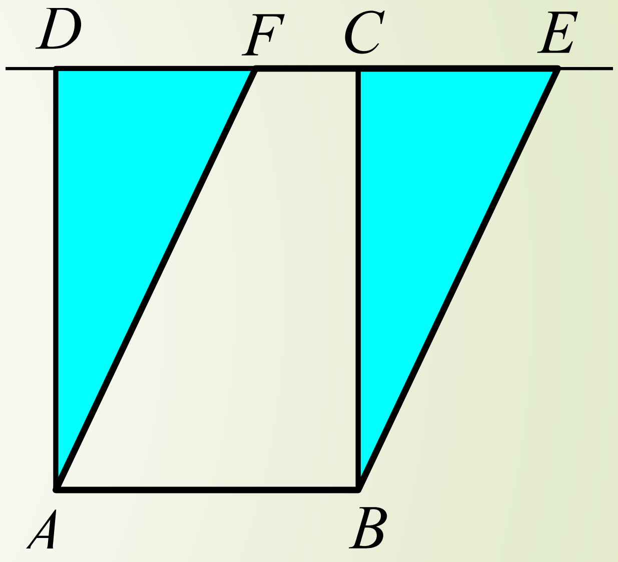
Célfeladatok

- Az *ABCD* konvex négyszög mindegyik oldalát meghosszabbítjuk a saját hosszával (lásd ábra). Hányszorosa az így kapott *A'B'C'D'* négyszög területe az eredeti négyszög területének?
- Az *ABCD* konvex négyszög *AB* oldalán felvettünk egy tetszőleges *P* pontot. Szerkesszünk a *P* ponton át olyan egyenest, amely felezi az *ABCD* négyszög területét!



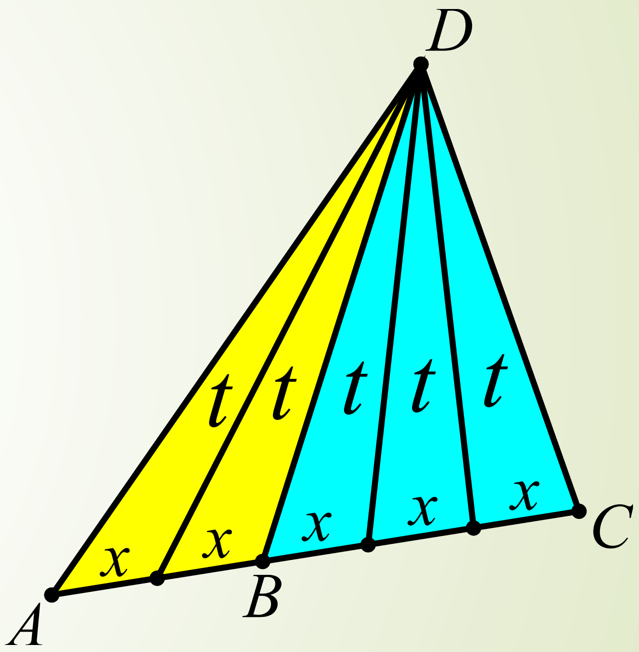
Ha még nem ismert a háromszög területképlete

- Legyen az *ABCD* téglalap, az *ABEF* pedig paralelogramma úgy, hogy a *C*, *D*, *E*, *F* pontok egy egyenesre illeszkednek. Bizonyítsuk be, hogy a két négyszög területe egyenlő!
- *AFD* és *BEC* háromszög egybevágó:
$$t(BEC) = t(AFD)$$
- Az *ABED* trapézból a *BEC* háromszöget levágva az *ABCD* téglalapot, *AFD* háromszöget levágva pedig az *ABEF* paralelogrammát kapjuk. Egyenlőkből egyenlőt levágva egyenlők maradnak, ezzel az állítást bizonyítottuk.
- Következmény: paralelogramma területe $t = a \cdot m$, háromszögé ennek a fele.
- Saját youtube csatornámon video: Nevezetes négyszögek területe (COV, 6. osztály)



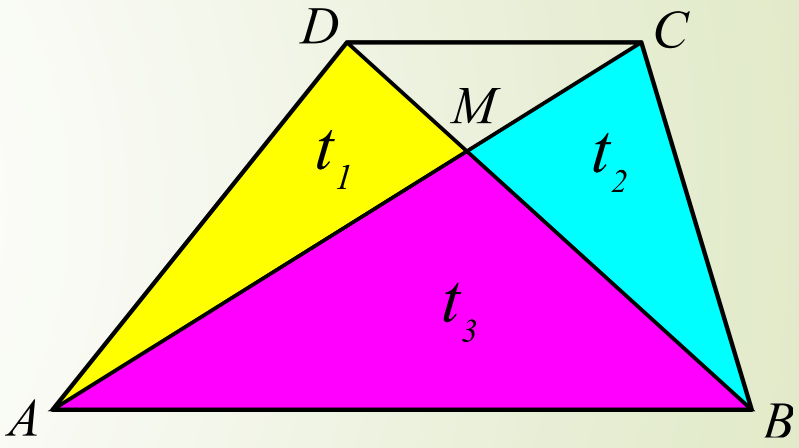
1. feladat

- Bizonyítsd be, hogy ha két háromszög alapja egy egyenesre illeszkedik, és harmadik csúcsa közös, akkor alapjaik hosszának aránya egyenlő területeik arányával.
- Legyen $AB: BC = 2: 3$, így $AB = 2x$, $BC = 3x$. Az ábrán látható 5 kis háromszög alapja x, magassága a D pont és az AB egyenes távolsága, ezért mindegyiknek a területe egyenlő (t).
- $t(ABC): t(BCD) = 2t: 3t = 2x: 3x = AB: BC$
- Speciális eset: a súlyvonal felezi a háromszög területét.
- Megjegyzés:
  Az állítás akkor is igaz, ha a két háromszög harmadik csúcsa (D) nem esik egybe, de egy az AB-vel párhuzamos egyenesre illeszkedik.



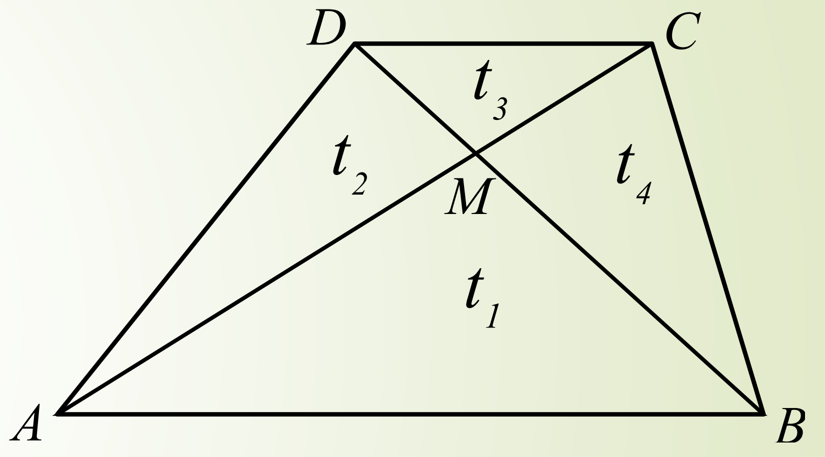
2. feladat („a trapéz tüdői”)

- Az *ABCD* trapéz alapjai *AB* és *DC*, átlóinak metszéspontja *M*. Bizonyítsd be, hogy az *AMD* és a *BCM* háromszögek területe egyenlő! ($t_1 = t_2$)
- Az *ABD* és az *ABC* háromszögek *AB* oldala közös, Az ehhez tartozó magasságaik egyenlők, ezért területük egyenlő:
  $$t_1 + t_3 = t_2 + t_3$$
- Mindkét háromszögből vágjuk le az *ABM* háromszöget, a megmaradó sárga és kék háromszög területe is egyenlő: $t_1 = t_2$



3. feladat

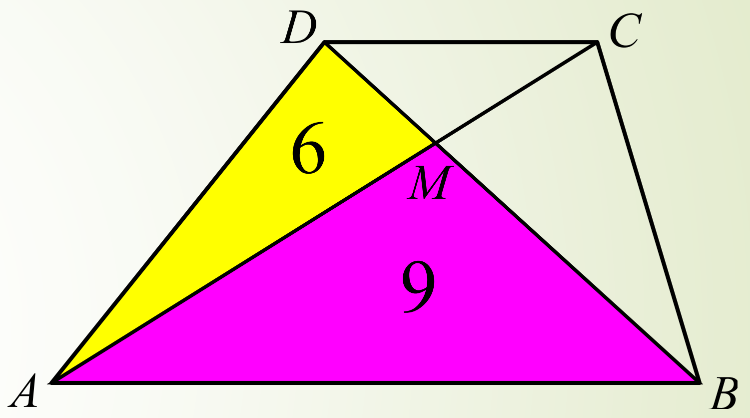
- Az *ABCD* trapézt átlói négy háromszögre osztják (lásd ábra). Bizonyítsuk be, hogy:
  $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$
- Az 1. feladat miatt
  $\frac{t_1}{t_2} = \frac{BM}{MD} = \frac{t_4}{t_3}$
- Az egyenletet rendezve kapjuk, hogy
  $t_1 \cdot t_3 = t_2 \cdot t_4$
- Megjegyzés: ne felejtsük el, hogy $t_2 = t_4$.
- Középiskolában: $(t_2)^2 = t_1 \cdot t_3$,
  vagyis $t_2 = \sqrt{t_1 \cdot t_3}$ (mértani közép)
- Hol használtuk ki az eredeti feladatban, hogy a négyszög trapéz?
- Sehol, bármely konvex négyszögre igaz.

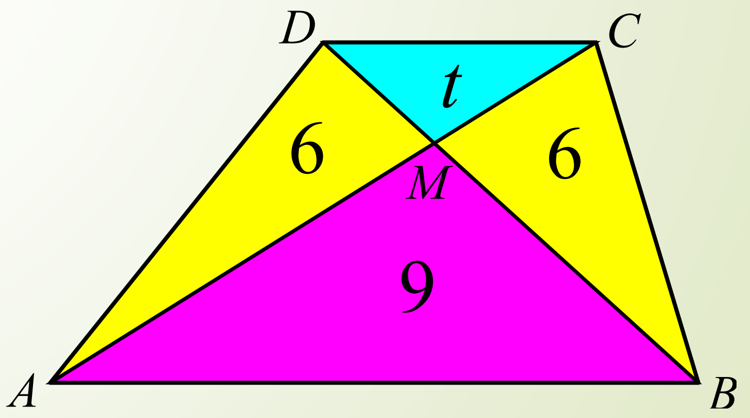


4. feladat – Kenguru versenyen szerepelt

- Az *ABCD* trapézt átlói négy háromszögre osztják. Ezek közül kettőnek a területét megadtuk az ábrán, négyzetcentiméterben mérve. Hány négyzetcentiméter az *ABCD* trapéz területe?
- A két trapéztüdő területe egyenlő, tehát a *BCM* háromszög területe is 6 cm² (2.f.)
- Az előző feladat alapján:

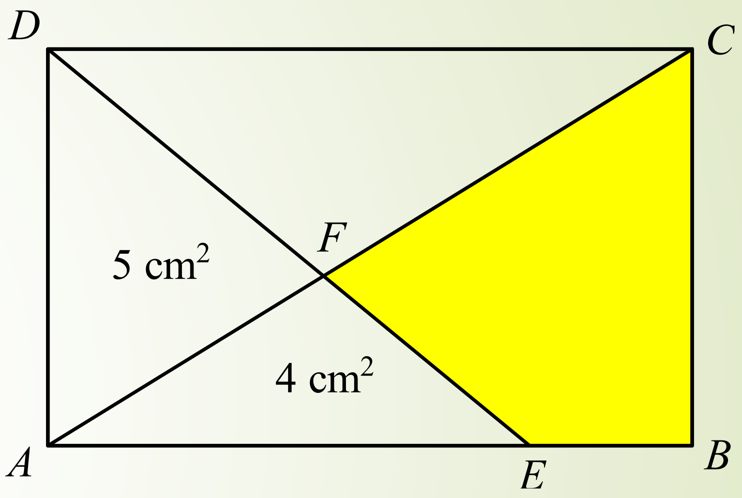
  $9 \cdot t = 6 \cdot 6$, tehát $t = 4 \text{ cm}^2$
- $t(ABCD) = 6 + 9 + 6 + 4 = 25 \text{ cm}^2$

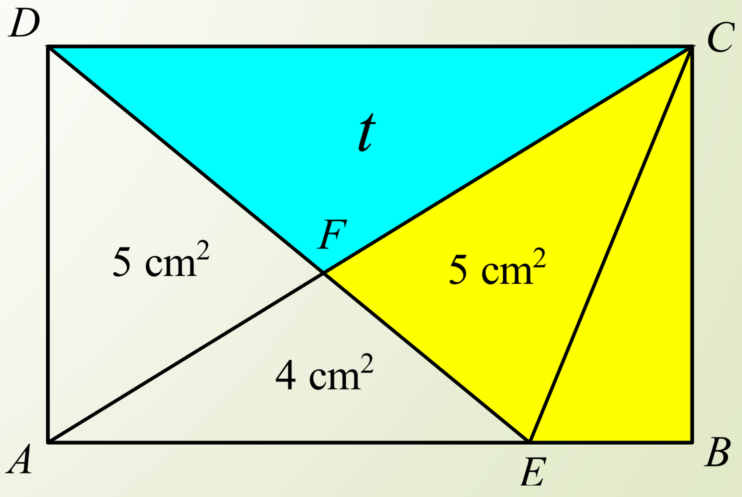




5. feladat – NMMV 2024, Nagyvárad, 9.o./1.f.

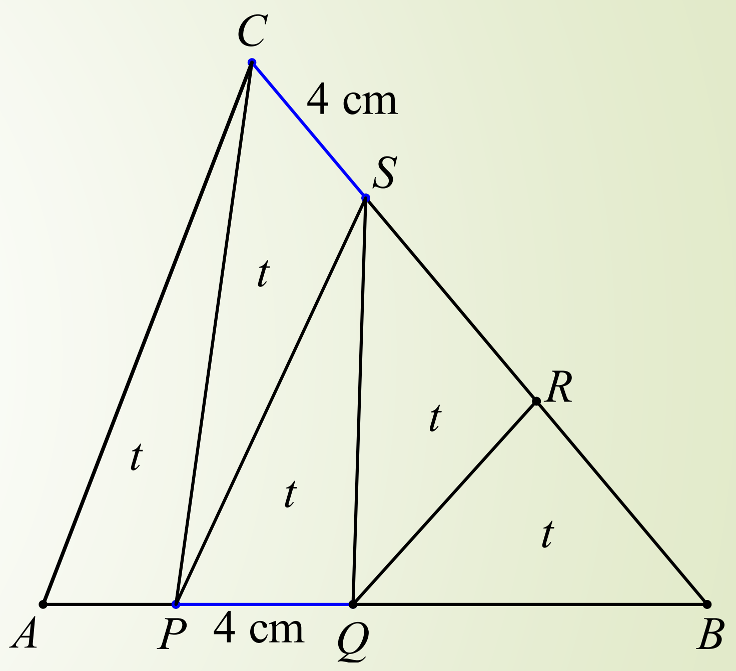
- Legyen az E pont az $ABCD$ téglalap AB oldalának egy belső pontja, az F pont pedig az AC átló és a DE szakasz metszéspontja. Az AFD háromszög területe 5 cm², az AEF háromszög területe pedig 4 cm².
  Hány cm² az $EBCF$ négyszög területe?
- $t(FEC) = t(AFD) = 5\ \text{cm}^2$
- $4 \cdot t = 5 \cdot 5$, tehát $t = 6{,}25\ \text{cm}^2$
- $t(ABC) = t(ACD) = 5 + 6{,}25 = 11{,}25\ \text{cm}^2$
- $t(FEBC) = t(ABC) - t(AEF) =$
  $= 11{,}25 - 4 = 7{,}25\ \text{cm}^2$
- Otthoni feladat: $AE : EB = ?$





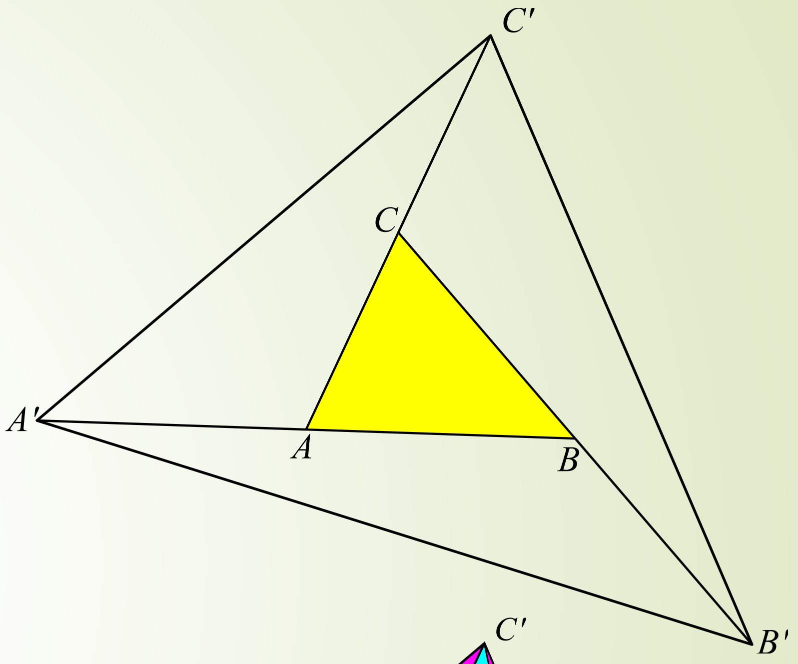
6. feladat

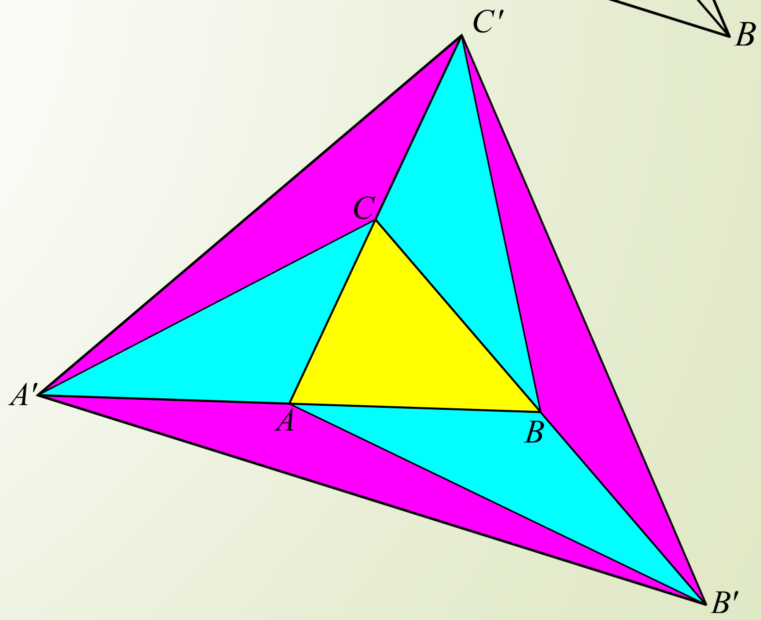
- Az ABC háromszöget az ábrán látható módon öt egyenlő területű háromszögre osztottuk. Tudjuk, hogy a PQ és az RS szakaszok hossza 4 cm. Hány cm az ABC háromszög kerülete, ha az AC oldalának hossza 14 cm?
- Az 1. feladat miatt $\frac{BS}{CS} = \frac{3t}{t} = 3$, tehát $BS = 3 \cdot CS = 12$ cm. ($BR = RS = 6$ cm)
- Hasonlóan $\frac{QB}{PQ} = \frac{2t}{t} = 2$, tehát $QB = 2 \cdot PQ = 8$ cm, és $\frac{AP}{PB} = \frac{t}{4t} = \frac{1}{4}$, tehát $AP = \frac{PB}{4} = \frac{12}{4} = 3$ cm.
- $AB = 3 + 4 + 8 = 15$ cm, $BC = 12 + 4 = 16$ cm, a háromszög kerülete $15 + 16 + 14 = 45$ cm.



7. feladat

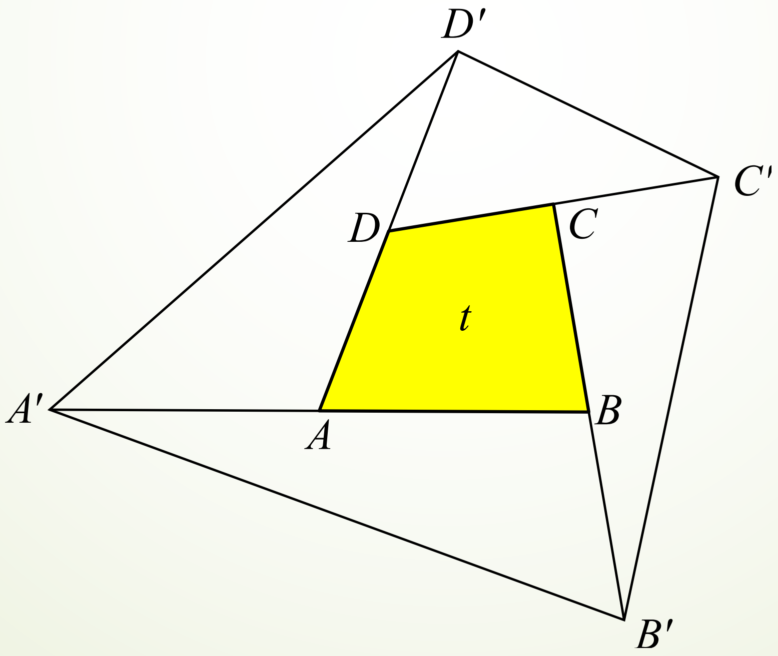
- Az *ABC* háromszög mindegyik oldalát meghosszabbítjuk a saját hosszával (lásd ábra). Hányszorosa az így kapott *A'B'C'* háromszög területe az *ABC* háromszög területének?
- Mindhárom kék háromszög területe egyenlő a sárga háromszög területével.
- Mindegyik rózsaszín (lila?) háromszög területe egyenlő valamelyik kék háromszög területével.
- Az *A'B'C'* háromszög 7 darab, a sárgával egyenlő területű háromszögből áll, ezért területe 7-szerese az *ABC* háromszög területének.
- Variációk: hosszabbítsuk meg mindegyik oldalt hasonlóan a saját 2, 3, 4, …*n*-szeresével, és keressünk általános képletet a nagy háromszög területére. Vagy csak konkrét esetekben.





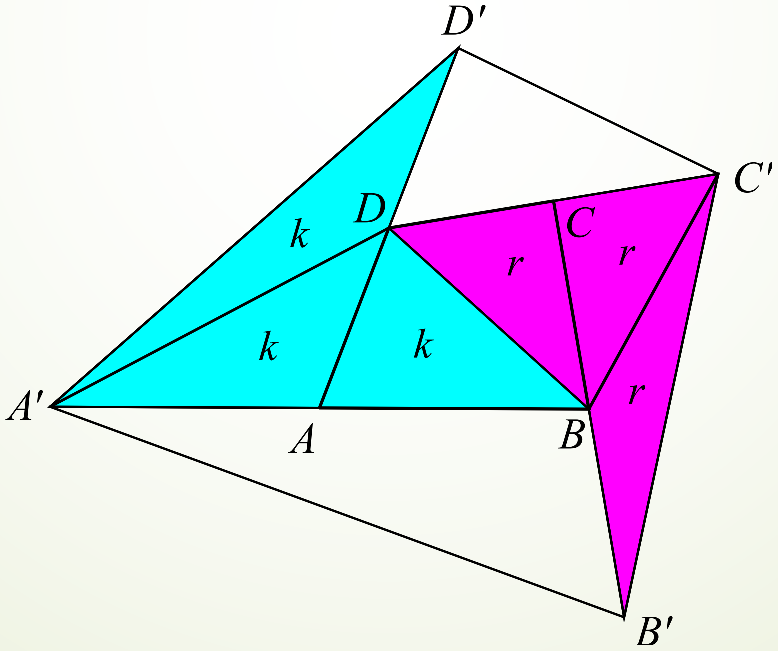
8. feladat – 1. célfeladat

- Az *ABCD* konvex négyszög mindegyik oldalát meghosszabbítjuk a saját hosszával (lásd ábra). Hányszorosa az így kapott *A'B'C'D'* négyszög területe az eredeti négyszög területének?



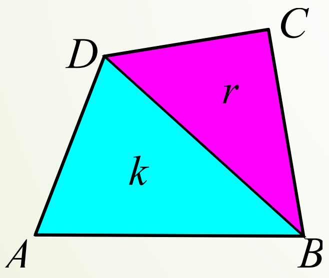
8. feladat – 1. célfeladat

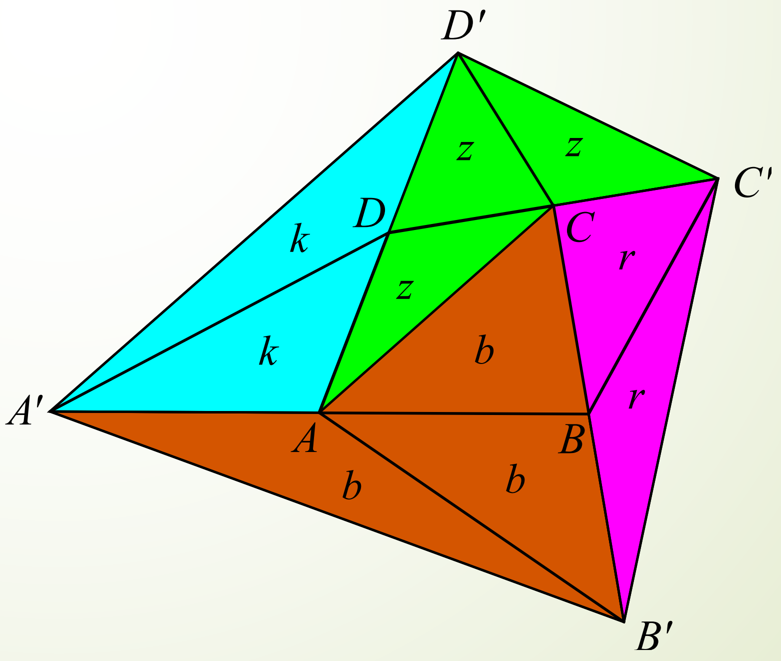
- Húzzuk be a BD átlót, és használjuk az előző feladat módszerét. Ne felejtsük el, hogy $t = k + r$, ahol t az $ABCD$ négyszög területe.



8. feladat – 1. célfeladat

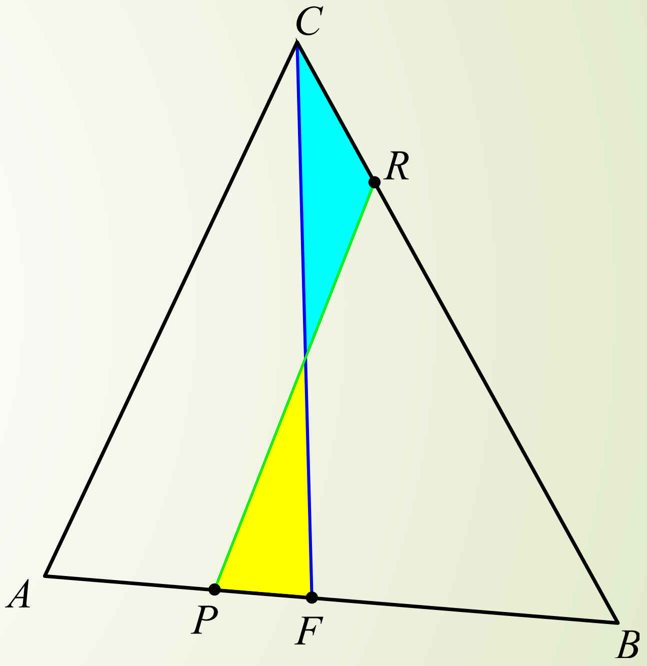
- Húzzuk be az AC átlót, és használjuk az előző feladat módszerét.
  Ne felejtsük el, hogy $t = z + b$, ahol t az $ABCD$ négyszög területe.
- $t(A'B'C'D') = 3z + 3b + 2k + 2r = 3(z + b) + 2(k + r) = 3t + 2t = 5t$





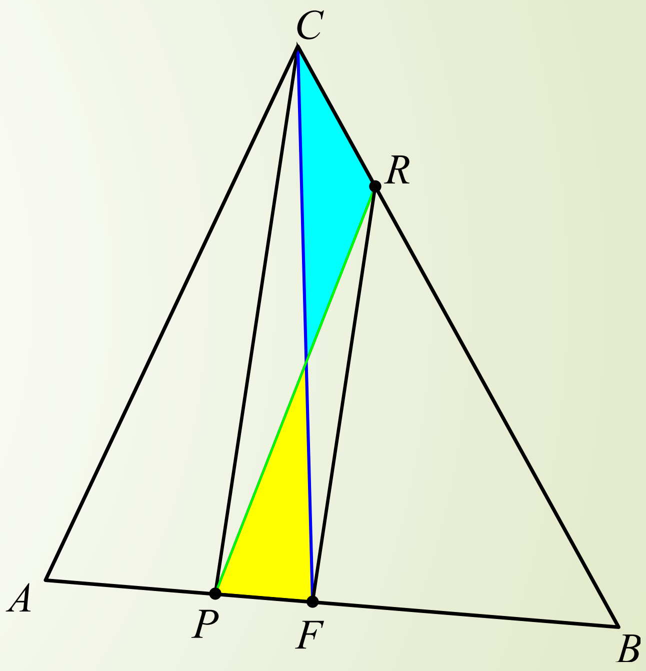
9. feladat

- Az ABC háromszög AB oldalán felvettünk egy tetszőleges P pontot. Szerkesszünk a P-n átmenő olyan egyenest, amely a háromszög területét felezi!
- Legyen az AB felezőpontja F, ekkor a CF súlyvonal felezi a háromszög területét.
- Mi igaz a PR szakaszra, ha az is felezi a területet? Az AFC háromszögből „átadjuk” a jobb oldali résznek a sárga háromszöget, ha „cserébe megkapjuk” a kéket. Ezzel akkor nem rontjuk el a felezést, ha a sárga és a kék háromszög egyenlő területű.
- Hol láttunk ilyen helyzetű, egyenlő területű háromszögeket? A trapéz tüdőire emlékeztet…



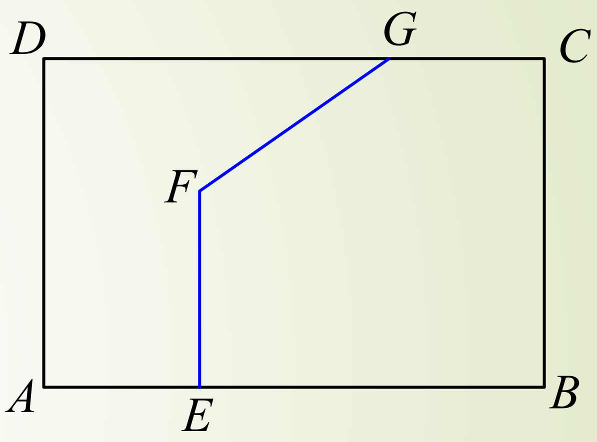
9. feladat

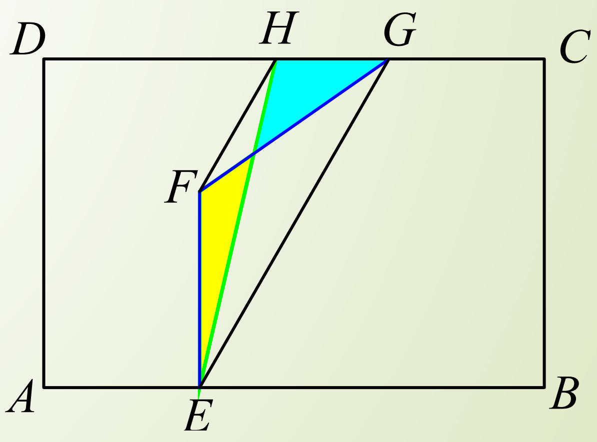
- Ha a *CPFR* négyszög trapéz, akkor bizonyított tény, hogy a sárga és a kék háromszög területe megegyezik.
- Szerkesztés: *P* pontot kössük össze *C*-vel, majd húzzunk vele párhuzamost *F*-en át. Ahol ez metszi a *BC* oldalt, ott lesz az *R* pont. *PR* egyenes (szakasz) felezi a háromszög területét.
- Diszkusszió: mi a helyzet, ha *P* pont egybeesik *F*-fel, illetve ha az *FB* szakasz belső pontja?



10. feladat

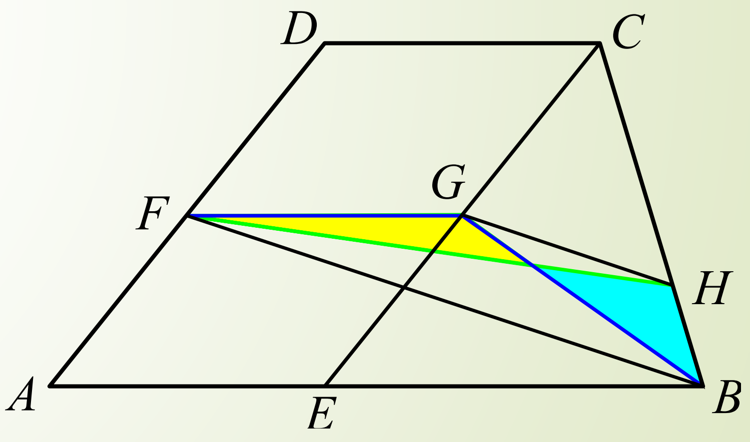
- Egy téglalap alakú telket Péter és Pál az ábrán látható kék kerítéssel osztotta két részre. Egy idő után bántotta a szemüket a kerítés alakja. Szeretnék kiegyenesíteni, de úgy, hogy egyikük se járjon rosszul. Segítsünk!
- Péter ugyanakkora területű részt adna át Pálnak (sárga), mint amekkora területűt kapna tőle (kék). Megint feltűntek a trapéz tüdői.
- Ha *FH* és *EG* szakaszok párhuzamosak, akkor az *EGHF* négyszög trapéz, ekkor teljesülnek a feltételek.
  EH egy megfelelő, kiegyenesített kerítés.





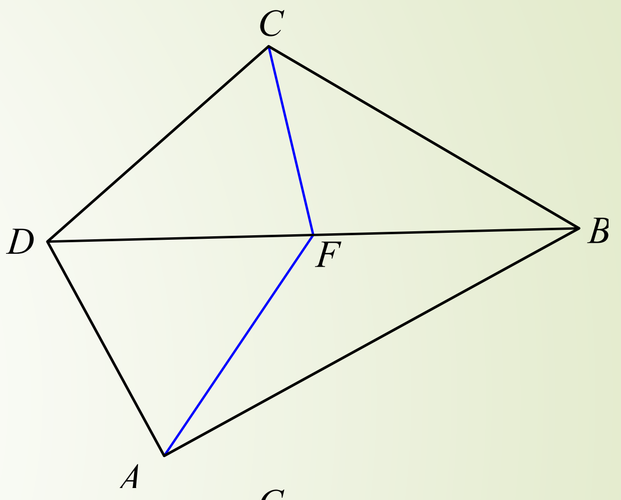
11. feladat – Kalmár megyei 1993., 8. osztály

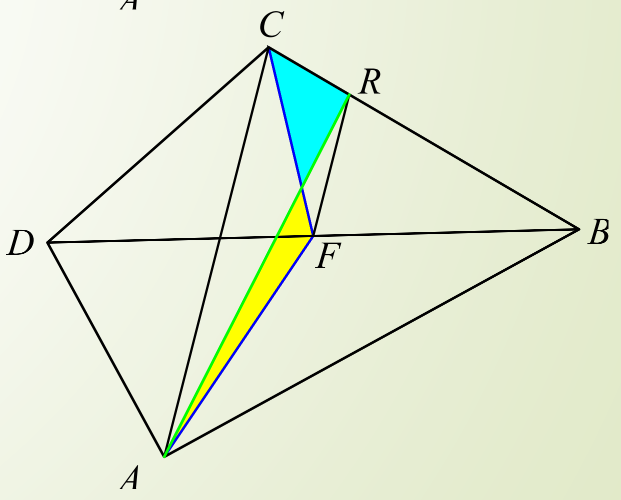
- Legyen az *ABCD* trapéz *AD* szárának felezőpontja *F*. Szerkesszünk olyan egyenest, amely illeszkedik *F*-re és felezi a trapéz területét!
- Gyakori ötlet trapéznál: bontsuk fel egy paralelogrammára és egy háromszögre.
- Húzzunk olyan töröttvonalat, amely felezi az egyes részek területét: paralelogrammánál a középvonal, háromszögnél a súlyvonal ilyen.
- Egyenesítsük ki a töröttvonalat az előző feladatban látott módszerrel.
  FH a keresett egyenes.



12. feladat

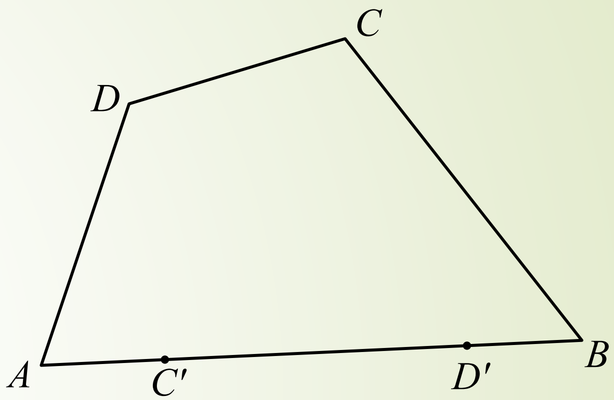
- Az *ABCD* konvex négyszögben szerkesszünk olyan egyenest, amely illeszkedik az *A* csúcsra és felezi a négyszög területét!
- Legyen a *BD* átló felezőpontja *F*. Az *AF* súlyvonal az *ABD*, a *CF* súlyvonal a *DBC* háromszög területét felezi, így az *AFC* töröttvonal felezi a négyszög területét.
- Egyenesítsük ki a területfelező töröttvonalat a tanult módon. Ha *AFRC* trapéz, akkor az *AR* egyenes felezi a négyszög területét.

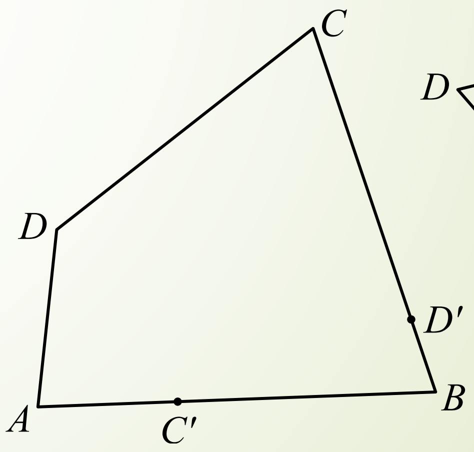


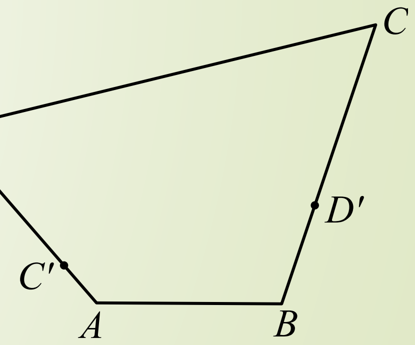


13. feladat – 2. célfeladat

- Az *ABCD* konvex négyszög *AB* oldalán felvettünk egy tetszőleges *P* pontot. Szerkesszünk a *P* ponton át olyan egyenest, amely felezi az *ABCD* négyszög területét!
- Előkészítés:
  Keressük meg az előző feladat ötletét használva azokat a *C’* és *D’* pontokat, amelyekre az *CC’* és a *DD’* szakasz felezi a területet.
- Három eset fordulhat elő:
  1. eset: mindkettő *AB*-re illeszkedik
  2. eset: csak az egyik illeszkedik *AB*-re
  3. eset: egyik sem illeszkedik *AB*-re.
- Könnyítési lehetőség: csak egy konkrét esetet vizsgáljunk, a diszkussziót mellőzve.

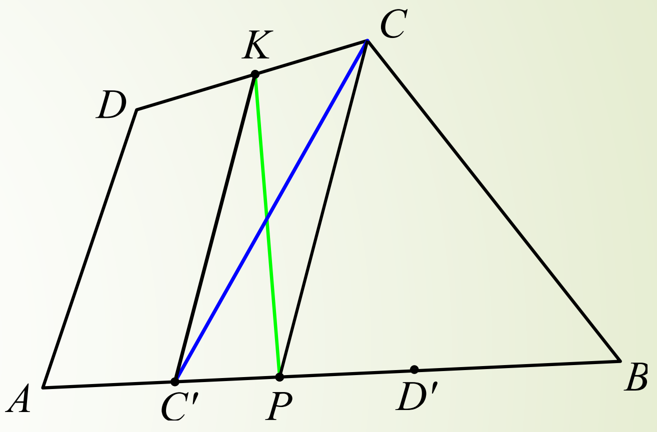


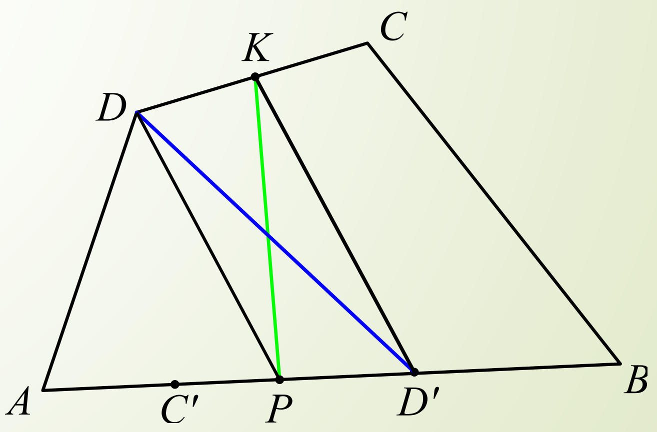




13. feladat – 1. eset

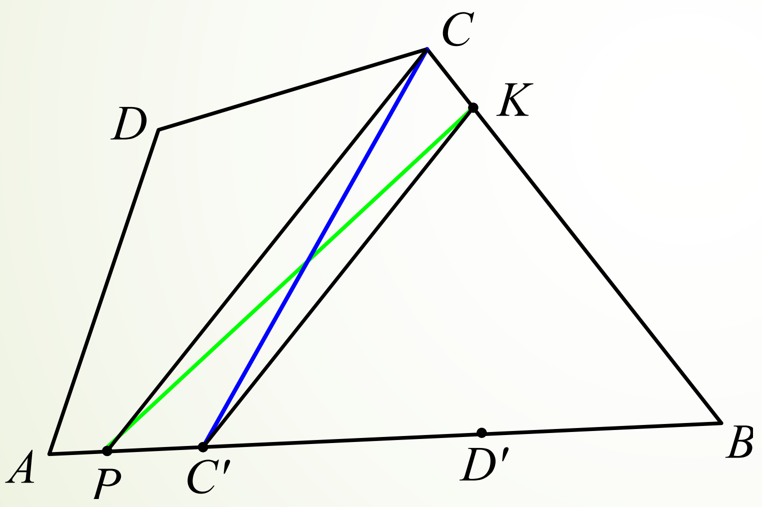
- <u>a) aleset</u>: A *P* pont *C’* és *D’* között van
- Egyik lehetőség: *CC’* felezi a területet. Húzzunk párhuzamost *C’*-n át *PC*-vel, így adódik a *K* pont. *C’PCK* trapéz, így *PK* felezi a terület.
- Másik lehetőség: ugyanazt a *K* pontot kapjuk, ha *C*, *C’* helyett *D*, *D*’ pontokkal végezzük el az előbb elmondottakat.

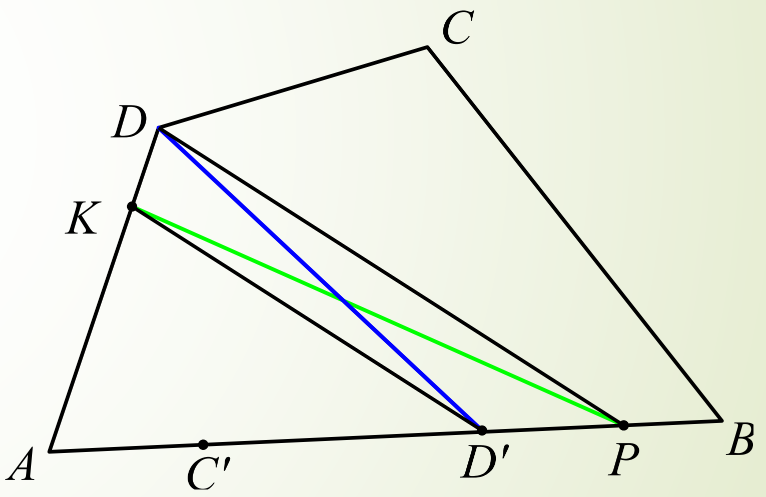




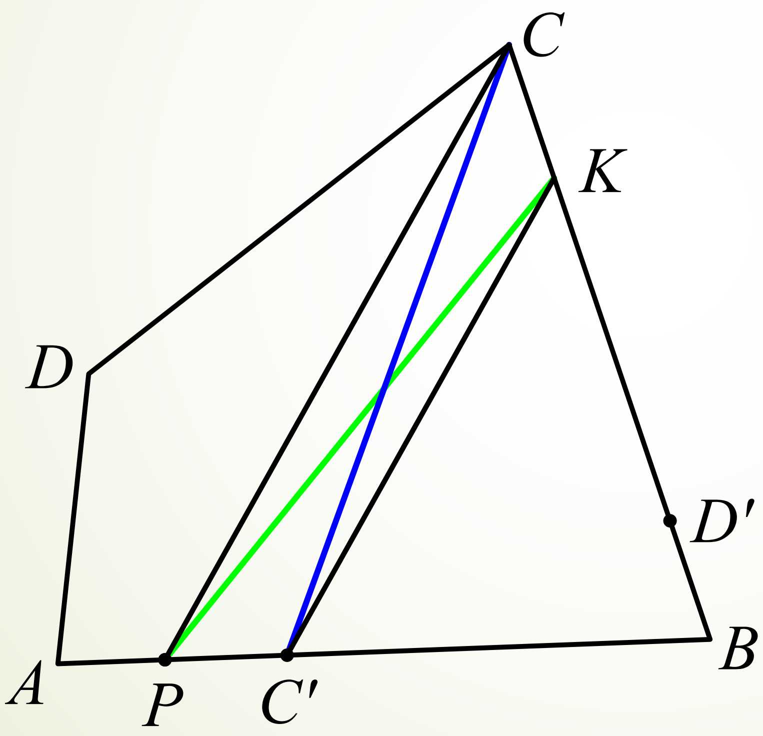
13. feladat – 1. eset

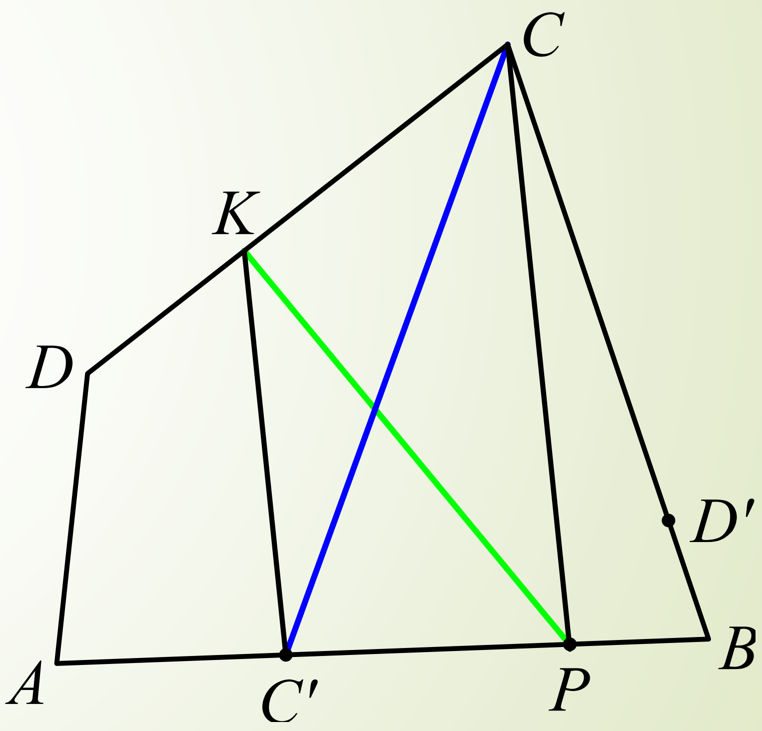
- <u>b) aleset</u>: A P pont nem C' és D' között van





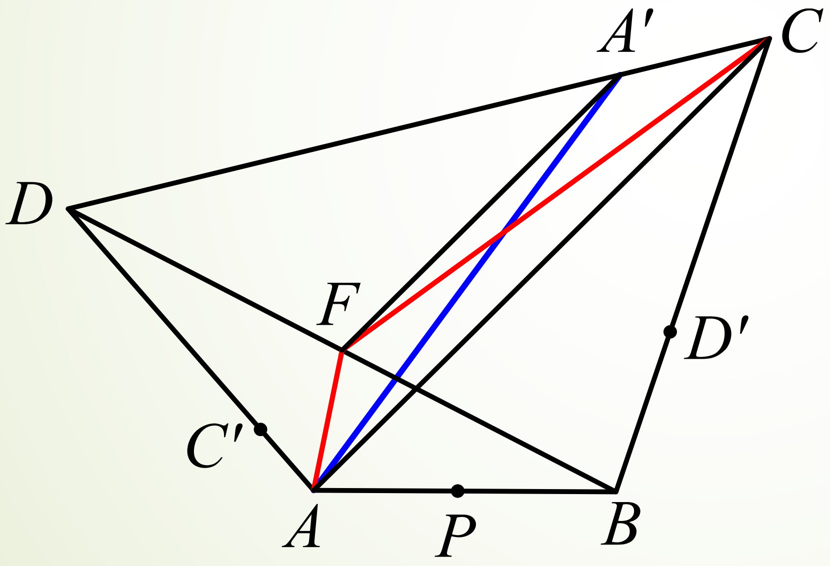
13. feladat – 2. eset

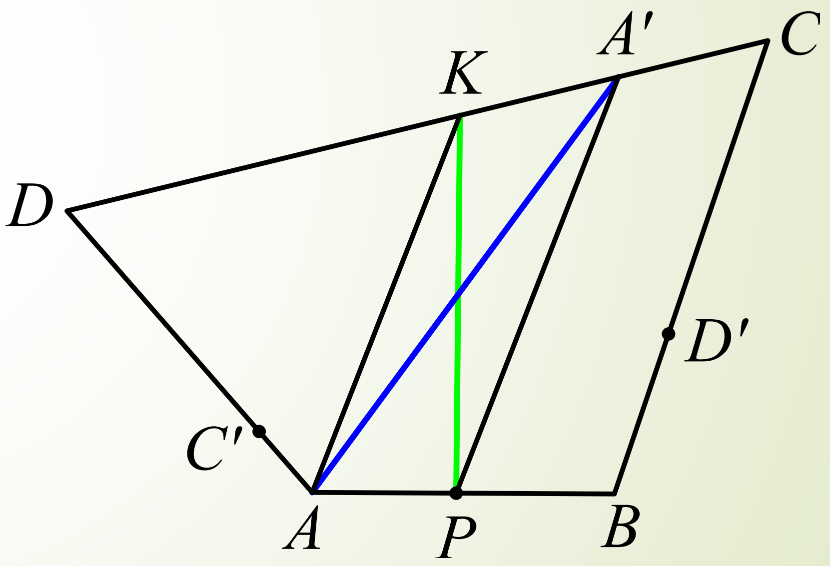




13. feladat – 3. eset

- Keressük meg az *A'* pontot is, és az *AA'* szakaszt cseréljük fel *PK*-ra.





Köszönöm a figyelmet!

Elérhetőségem: erdosgaborkanizsa@gmail.com

Honlapom: www.microprof.hu