Skatulyaelv versenyszinten

Erdős Gábor, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

RLV 2024, Budapest

Célfeladat

- Legyen $p(n)$ az n pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztója. Mennyi a következő összeg értéke:
  $p(101) + p(102) + p(103) + \cdots + p(199) + p(200)$
- Kenguru-versenyen szerepelt, kicsit nagyobbaknak, valahol a feladatsor végén.

1. feladat

- Legfeljebb hányat választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokból úgy, hogy a kiválasztott számok között
  a) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak az osztója?
  b) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak a kétszerese?
- Osztója helyett érdemesebb a többszörösére gondolni. A két kérdés segíti egymást: ha egy szám egy másiknak a többszöröse, akkor annak legalább a kétszerese.
- Jó nyitás: ki lehet próbálni, összesen 63 valódi részhalmaz van.
- a) Párokat alkothatunk: 1-5, 2-4, 3-6, mindegyik párból maximum az egyiket választhatjuk, így nem lehet 3-nál többet.
- Hármat pedig lehet: például 2, 3, 5 vagy 4, 5, 6. (Hányféleképpen lehet?)
- b) Próbálgatással pl. 1, 3, 4, 5 jó négyes. Lehet esetleg 5-öt? Nem, mert az 1-2 és a 3-6 párból nem választhatjuk be mindkettőt.
- Szélsőérték: többet nem lehet (bizonyítás), annyit viszont igen (konstrukció)

2. feladat

- Legfeljebb hányat választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokból úgy, hogy a kiválasztott számok között
  a) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak az osztója?
  b) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak a kétszerese?
- a) Jó lépcsőfok, itt még működnek a párok: 1-7, 2-6, 3-9, 4-8, 5-10 mindegyikéből max 1 választható, vagyis max 5 darab.
  DE: vannak, amiket nem választhatok: az 1 nyilvánvaló, de pl. a 2 sem, mert akkor a 4-8 párból egyiket sem választhatom.
- Konstrukció: 6, 7, 8, 9, 10 biztosan jó, mert $6 \cdot 2 = 12 > 10$.
- Mennyire lehet kicsi a legkisebb szám? 4, 5, 6, 7, 9
- b) 1-2-4-8 számok közül max 2 választható, 3-6, 5-10 párokból max 1-1, illetve a 7 és a 9, vagyis max 6 darab.

3. feladat

- Legfeljebb hányat választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, …, 19, 20 számokból úgy, hogy a kiválasztott számok között
  a) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak az osztója?
  b) egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak a kétszerese?
- a) Itt már nem működik az előző módszer. De: könnyű találni egy konstrukciót: 11, 12, 13, …, 19, 20 jó, mert $11 \cdot 2 = 12 > 20$.
- Kellene: nem lehet 10-nél több. Ötlet: alkossunk 10 csoportot (skatulyát) úgy, hogy mindegyik csoportból max 1 legyen választható.
- Mohó algoritmussal: csak akkor nyitok új csoportot, ha nem tudom egyik már megkezdett csoporthoz sem elhelyezni a számot.
- 1-2-4-8-16   3-6-12   5-10-20   7-14   9-18   11   13 15 17 19
- b) Az előző csoportokból $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14$ megfelelő szám választható ki. Hányféleképpen választható ki 14 szám?

3. feladat továbbkérdezés

- Végezzük el az a) kérdésben megfogalmazott kiválasztást úgy, hogy a legkisebb kiválasztott szám minél kisebb legyen!
  1-2-4-8-16   3-6-12   5-10-20   7-14   9-18   11   13   15   17   19
- Az 1-est nyilván nem választhatjuk ki.
  Ha a 2 kiválasztott, akkor ezen kívül csak páratlan szám lehet kiválasztott. Ekkor a 2. csoportból a 3 kiválasztott, de ez osztója a 15-nek. (indirekt gondolatmenetek) Közben kiderült, hogy a 3 sem lehet kiválasztott, illetve a 15 miatt az 5 sem.
- Lehet viszont a legkisebb kiválasztott szám a 4:
  1-2-4-8-16   3-6-12   5-10-20   7-14   9-18   11   13   15   17   19

4. feladat

- Legfeljebb hányat választhatunk ki az 1, 2, 3, 4, …, 99, 100 számokból úgy, hogy a kiválasztott számok között egyik se legyen valamelyik másik kiválasztottnak az osztója?
  Mennyi a legkisebb kiválasztott szám minimuma?
- Konstrukció: 51, 52, …, 100 jó, ez 50 darab.
- Csoportok az előző gondolatmenettel:
  1-2-4-8-16-32-64 3-6-12-24-48-96 5-10-20-40-80
  7-14-28-56 9-18-36-72 11-22-44-88 13-26-52 15-30-60
  17-34-68 19-38-76 21-42-84 23-46-92 25-50-100
  27-54 29-58 … 49-98 51 53 55 … 97 99
- Hány csoport ez? Hogyan lehet a legkönnyebben megszámolni?
  Mit lehet észrevenni?
- Mindegyik csoportban csak egy páratlan szám szerepel, 50 páratlan szám van.

4. feladat

- Milyen kapcsolat van az egy csoportba került számok között?
  1-2-4-8-16-32-64 3-6-12-24-48-96 5-10-20-40-80
  7-14-28-56 9-18-36-72 11-22-44-88 13-26-52 15-30-60
  17-34-68 19-38-76 21-42-84 23-46-92 25-50-100
  27-54 29-58 … 49-98 51 53 55 … 97 99
- Segítség: gondoljunk a prímfelbontásra.
- Válasz: Prímfelbontásukban a 2 kitevője különböző, minden páratlan prím kitevője azonos.
  Avagy: megegyezik a legnagyobb páratlan osztójuk.
  Skatulyafeliratok: „Legnagyobb páratlan osztója 15”…
- Mennyire lehet kicsi a legkisebb kiválasztott szám?

4. feladat

- Most nézzük a következő számokat, az egymás alatt lévőket egy skatulyában helyeztük el:
  1 3 9 27 81
  2 6 18 54
  4 12 36
  8 24
  16
- A 81 kiválasztott, de akkor az 1 3 9 27 nem lehetnek azok, hiszen a 81 osztói. A 27-es skatulyából csak az 54 lehet így kiválasztott, ekkor a tőle balra lévő 2 6 18 nem lehet az, hiszen osztói az 54-nek. Hasonlóan folytatva, a felírt számok közül eddig a 16 a legkisebb kiválasztható.
- Lehet-e 16-nál kisebb szám a kiválasztottak között?
  Már kiesett a versenyből: 1 2 3 4 6 8 9 12, maradt: 5 7 10 11 13 14 15

4. feladat

- Zárjuk ki a megmaradt 5 7 10 11 13 14 15 számokat is!
- Nézzük a következő számcsoportokat:
  5 15 45   7 21 63   11 33 99   13 39
  10 30   14 42
- A legkisebb kiválasztható szám a 16. Erre létezik konstrukció, haladjunk a skatulyák sorrendjében (1, 3, 5, …), rendre kiválasztható:
  16, 24, 20, 28, 36, 44, 26, 30, 34, 38,
  42, 46, 50, 54, 58, 62, 66, 35, 37, 39,
  majd a további 30 darab páratlan szám.
- Általánosítás:
  a) 1-től $2n$-ig mindig max n darab választható ki,
  és ha $3^k < 2n < 3^{k+1}$, akkor minden kiválasztott szám $\geq 2^k$.

5. feladat - célfeladat

- Legyen $p(n)$ az n pozitív egész szám legnagyobb páratlan osztója. Mennyi a következő összeg értéke:
  $p(101) + p(102) + p(103) + \cdots + p(199) + p(200)$
- Ha nem rögtön a sor után jön (szakkörök tervezése ☺), akkor nem biztos, hogy összekapcsolják. Ötlet: kezdjük kicsivel!
- $p(4) + p(5) + p(6) = 1 + 5 + 3 = 9$
- $p(5) + p(6) + p(7) + p(8) = 5 + 3 + 7 + 1 = 16$
- $p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10) = 3 + 7 + 1 + 9 + 5 = 25$
- Folytatható még 2-3 sorral. Mit figyelsz meg?
- Minden páratlan szám előfordul $2n$-ig, és az összeg n^2.

5. feladat - célfeladat

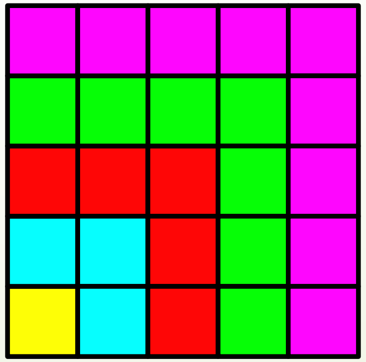
- Mindkettőt bizonyítani kell. Ha ezt megtesszük:
  $$p(101) + p(102) + p(103) + \cdots + p(199) + p(200) =$$
  $$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + 197 + 199 = 100^2 = 10000$$
- A teljes indukció gondolata előkészíthető 7-8. osztályban. (Matektáborban gyerekek adták a következő megoldást).
- $p(5) + p(6) + p(7) + p(8) = 5 + 3 + 7 + 1 = 16$
- Mi változik, ha a következő összeget nézzük:
  $p(6) + p(7) + p(8) + p(9) + p(10) = 3 + 7 + 1 + 9 + 5 = 25$
- Az előző összegből a kék tagok megmaradnak, bejön a zöld tag, vagyis a következő páratlan szám, és a piros tagnál a szám kétszeresének legnagyobb páratlan osztója ugyanaz marad.

5. feladat - célfeladat

- Másik megoldás: Kapcsoljuk össze az eddigiekkel!
- Az 1, 2, 3, 4, …, 199, 200 számokból max 100-at lehet kiválasztani úgy, hogy semelyik kiválasztott ne legyen semelyik másik kiválasztottnak az osztója. A kiválasztott számok legnagyobb páratlan osztója különböző, különben közülük a kisebbik osztója lenne a nagyobbiknak. A 101, 102, 103, …, 199, 200 egy a feltételeknek megfelelő kiválasztás, mindegyiknek más a legnagyobb pozitív osztója. 100 számot választottunk, 100 páratlan szám van 200-ig, így mindegyik páratlan szám pontosan egyszer fordul elő az összegben.

5. feladat - célfeladat

- Már csak azt kellene bebizonyítanunk, hogy az első n páratlan szám összege mindig n^2, tehát $1+3+5+7+9+\cdots+197+199=100^2=10000.$
- Tegyük meg ezt úgy, hogy egy okosabb 5-6. osztályos is megértse. Középiskolai szinten: teljes indukció. Most: készítsünk hozzá egy ügyes ábrát. (Molnár István sok ilyet tud mutatni, főleg középiskolában használt összefüggések bizonyítására.)



Köszönöm a figyelmet!

Elérhetőségem: erdosgaborkanizsa@gmail.com

Honlapom: www.microprof.hu