Kétszemélyes játékok

Erdős Gábor, Batthyány Lajos Gimnázium, Nagykanizsa

RLV 2024, Budapest

Célfeladatok

- Öt kupacban rendre 15, 26, 50, 55 és 59 gyufaszál van az asztalon. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben az egyik kupacból kell elvenni tetszőleges számú, de minimum 1 gyufaszálat, majd ha akarja, bármelyik másik kupacból is elvehet tetszőleges számú gyufaszálat. Az nyer, aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról.
  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Az asztalon áll 8 pénzérme, melyek közül legalább az egyiken a fej van felül, pl.: FFFFIFII. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben meg kell fordítani egy fejet, és ha akar, ettől balra egy tetszőleges pénzérmét. Az nyer, aki utoljára tud lépni.
  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

1. feladat

- Az asztalon áll 8 pénzérme, melyek közül legalább az egyiken a fej van felül, pl.: FFFIIFIF. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben meg kell fordítani egy fejet, és ettől jobbra mindegyik pénzérmét. A játék akkor ér véget, amikor mindegyik érmén az írás van felül: IIIIIIII. Az nyer, aki utoljára tud lépni.
  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Nézzünk néhány lépést:
  FFFIIFIF – FFIFFIFI – FFIIIFIF – IIFFFIFI – IIFIIFIF ….
- Fordul valami, és tőle jobbra minden, akkor az utolsó mindig megfordul. (Ez egy nehéz gondolat!)
- Anna lépése után mindig I a vége, Bea lépése után F, ezért a végállapotot csak Anna érheti el.

1. feladat folytatása

- Biztosan véget ér a játék?
- Írjuk F helyett 1-et, I helyett 0-t. Ekkor az egyes állapotok kettes számrendszerben leírt számoknak felelnek meg (állapotfüggvény)
- 11<u>1</u>00101 –110<u>1</u>1010 – <u>1</u>1000101 – 001<u>1</u>1010 – 00100101 ….
- A szám minden lépésben csökken, és értéke egész szám, negatív nyilván nem lehet, ezért előbb-utóbb nulla lesz.

2. feladat

- Az asztalon több sorban vannak pénzérmék (lásd ábra, a fejet mostantól 1-gyel, az írást 0-val jelöljük). Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben meg kell fordítani egy fejet, és ettől jobbra abban a sorban mindegyik pénzérmét. A játék akkor ér véget, amikor az asztalon lévő mindegyik érmén az írás van felül. Az nyer, aki utoljára tud lépni.
  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Nézzük meg az utolsó oszlopot, itt mindig 1-gyel nő vagy csökken az 1-esek száma, vagyis változik a számjegyek összegének kettes maradéka. Anna lépése után ez mindig 0, lesz, Bea lépése után pedig mindig 1.
- A játék véget ér, mert az öt szám összege csökken. Biztosan Anna nyeri a játékot (el sem tudja rontani).

0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
					1

0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
					0

3. feladat – az előző, kis módosítással

- Annyit változtassunk, hogy miután megfordít egy fejet, abban a sorban ettől jobbra mindegyik érméről egymástól függetlenül eldöntheti, hogy megfordítja azt vagy sem. Most melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Most nem elég az egyik oszlopot néznünk, nézzük az összes oszlopot. (NIM-összeg)
- Ha az összegben van 1, mindig el lehet érni, hogy ne legyen. Ha az összeg csupa 0, akkor a lépés után lesz benne 1-es.
  Vesztő helyzet: ha a NIM összegben nincs 1.
- Keresd meg az összes jó lépést!

0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1

0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0

4. feladat

- Két kupacban 10, illetve 17 gyufaszál van. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben az egyik kupacból kell elvenni tetszőleges számú, de minimum 1 gyufaszálat. Az nyer, aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról.
  Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Módszertan: Nem jönnek rá hamar, ha még nem láttak ilyet. Hagyjuk őket játszani, adjunk szimultánt, vagy játsszunk egy kihívóval a táblánál. Jöjjenek rá, hogyan verjük meg őket, és hogy az a módszer vajon miért működik…
- Szimmetriára épülő játékok alapfeladata. Ha a végállapot szimmetrikus, hozz létre egy szimmetrikus helyzetet, amit az ellenfél mindig csak elrontani tud.
- Itt: Anna elvesz 7-et a nagyobb kupacból, így lesz két egyforma 10-es kupac. Ezt követően alkalmazza a tükörmódszert: amennyit elvesz Bea az egyikből, annyit ő elvesz a másikból.

5. feladat – a klasszikus NIM játék

- Öt kupacban rendre 15, 26, 50, 55 és 59 gyufaszál van az asztalon. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben az egyik kupacból kell elvenni tetszőleges számú, de minimum 1 gyufaszálat. Az nyer, aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Analógia: ez ugyanaz a játék, mint a 3. volt, ha átírjuk a kupacok elemszámát kettes számrendszerbe.
- Egyik lehetséges nyerő lépés: 50-ből legyen 25. Keresd meg a másik két nyerő lépést!
- 55-ből legyen 28, vagy 59-ből legyen 16.

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
50	1	1	0	0	1	0
55	1	1	0	1	1	1
59	1	1	1	0	1	1
	1	0	1	0	1	1

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
25	0	1	1	0	0	1
55	1	1	0	1	1	1
59	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0

6. feladat – az 1. célfeladat, a Moore-NIM

- Öt kupacban rendre 15, 26, 50, 55 és 59 gyufaszál van az asztalon. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben az egyik kupacból kell elvenni tetszőleges számú, de minimum 1 gyufaszálat, majd ha akarja, bármelyik másik kupacból is elvehet tetszőleges számú gyufaszálat. Az nyer, aki az utolsó gyufaszálat elveszi az asztalról. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Használjuk a kettes számrendszert, de most (mod 2) helyett (mod 3) adjuk össze minden helyi értéken a számjegyeket. (Miért?)
- Ha az összegben van nem 0 számjegy, akkor Anna le tudja nullázni (?). Ha Bea mindig olyan helyzetben lép, amikor az összeg csak 0-kat tartalmaz, akkor lépése után lesz az összegben 1 vagy 2.
- 50-ből legyen 36, és 55-ből legyen 53.

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
50	1	1	0	0	1	0
55	1	1	0	1	1	1
59	1	1	1	0	1	1
	0	1	0	2	2	0

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
36	1	0	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
59	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0

6. feladat –a Moore-NIM folytatása

- Házi feladat: keresd meg az összes jó lépés Anna számára!
  Segítség: Nézd végig, hogy ha először a második oszlopban az 55 sorában fordítom át az 1-est 0-ra, akkor melyik lehet a másik kupac, amiből elvehetek gyufaszálakat?
- Utóbbi kérdésre a válasz: csak a 15 lehet a másik kupac, a 4. oszlop (4-es helyi érték) miatt. Miért?
- Alkoss olyan kezdőállást, amelyben csak egyféleképpen dönthetjük el, hogy melyik két kupacból veszünk el!

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
50	1	1	0	0	1	0
55	1	1	0	1	1	1
59	1	1	1	0	1	1
	0	1	0	2	2	0

15	0	0	1	1	1	1
26	0	1	1	0	1	0
36	1	0	0	1	0	0
53	1	1	0	1	0	1
59	1	1	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0

6. feladat –a Moore-NIM folytatása

- Az egyik lehetséges ötlet: az első olyan oszlopban, amelyben az összeg nem 0, legyen pontosan két darab 1-es. Ezeket mindenképpen 0-ra kell változtatni, ezért a 42-t és a 36-ot kell csökkentenünk.
- Az egyik lehetséges megoldás: a 42-ből 27, a 36-ból 11 lesz (lásd ábra). Van itt másik jó lépés?
- Igen, a második oszlopban eldönthetjük, hogy melyik 0-t fordítjuk 1-esre. Ha ezt a 42 helyett a 36-nál tesszük meg, akkor a 42-ből lesz 11 és a 36-ból lesz 27.
- Házi feladat: tudnád úgy módosítani, hogy csak egyetlen jó lépése legyen Annának?

14	0	0	1	1	1	0
22	0	1	0	1	1	0
42	1	0	1	0	1	0
21	0	1	0	1	0	1
36	1	0	0	1	0	0
	2	2	2	1	2	1

14	0	0	1	1	1	0
22	0	1	0	1	1	0
27	0	1	1	0	1	1
21	0	1	0	1	0	1
11	0	0	1	0	1	1
	0	0	0	0	0	0

7. feladat – játékok összege

- Mi a helyzet, ha sok kupac van, de vannak köztük egyformák?
  Például: 11 11 11 13 16 16 16 16 24 24 29
- Ötlet: bontsuk fel a játékot több játék összegére. Mintha egyszerre több ellenfél ellen játszanék. Válasszuk le párba állítva az egyenlő elemszámú kupacokat:
  11 11 **11** **13** 16 16 16 16 24 24 **29**
- A zöld, kék, barna, sárga játékban várjuk meg, míg Bea lép, és alkalmazzuk a tükörmódszert. Lényegében a lila, 3 kupacos NIM játékot kell Annának megnyerni: 11 13 29.
  Mi a jó kezdőlépés?
- Válasz: a 29-ből kell elvenni 23-at, hogy 6 maradjon: 11 13 6
- Tanulság: csak azok a kupacok fontosak, amelyekből páratlan sok van.

8. feladat – a 2. célfeladat

- Az asztalon áll 8 pénzérme, melyek közül legalább az egyiken a fej van felül, pl.: FFFFIFII. Anna és Bea felváltva lépnek, Anna kezd. Egy lépésben meg kell fordítani egy fejet, és ha akar, ettől balra egy tetszőleges pénzérmét. Az nyer, aki utoljára tud lépni. Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?
- Az *n*-edik helyen lévő érme megmutatja, hogy az *n* elemű kupacok száma páros (I) vagy páratlan (F). Vagyis lényegében egy 5 kupacos NIM játékot kell megnyernünk: 1 2 3 4 6
- Mit léphetünk? Hányféle megfelelő lépés van? Hogyan kódoljuk ezt az érmesoron?

1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
6	1	1	0
4	1	0	0
	0	1	0

8. feladat – a 2. célfeladat

- Kezdőállapot: 1 2 3 4 6, vagyis FFFFIFII
- 1. lehetőség: vegyük el a teljes 2-es kupacot: 1 3 4 6
  Megfordítjuk a 2. fejet: FIFFIFII
  (2-esből eddig páratlan sok volt, most eggyel kevesebb, vagyis páros sok marad).
- 2. lehetőség: 3-ból vegyünk el 2-t: 1 2 1 4 6
  De a két 1-es kiesik a játékból (tükörmódszer).
  Vagyis lényegében maradt a 2 4 6
  Megfordítjuk a 3. fejet, majd 1. fejet is: IFIFIFII
- 3. lehetőség: 6-ból vegyünk el 2-t: 1 2 3 4 4
  A két 4-es kiesik a játékból, marad 1 2 3
  Megfordítjuk a 6. fejet, majd a 4. fejet: FFFIIIII

1	0	0	1
2	0	1	0
3	0	1	1
6	1	1	0
4	1	0	0
	0	1	0

8. feladat – a 2. célfeladat módosítva

- Egy másik kezdőállapot: 2 3 5, vagyis IFFIFIII
- Itt csak egy lehetőség van: az 5-ös kupacból vegyünk el 4-et, így 1 lesz belőle, vagyis az új állás 1 2 3.
- Hogyan kódoljuk ezt?
  Fordítsuk meg az 5. fejet, majd fordítsuk meg az első írást. 5-ös kupacból páros sok lesz, viszont 1-esből, amiből eddig páros sok volt, most páratlan sok lesz.

2	0	1	0
3	0	1	1
5	1	0	1
	1	0	0

Köszönöm a figyelmet!

Elérhetőségem: erdosgaborkanizsa@gmail.com

Honlapom: www.microprof.hu